V

Roberval

Sur la composition des Mouvements etc.

De recognitione aequationum.

Traité des Indivisibles

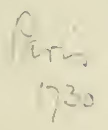
De Trochoide


AQUILA NON CAPTAT MUSCAS
STILLMAN DRAKE

DIVERS OUVRAGES

DE

M. PERSONIER DE ROBERVAL.





OBSERVATIONS
SUR LA COMPOSITION
DES MOUVEMENS,
ET SUR LE MOYEN DE TROUVER
LES TOUCHANTES
DES LIGNES COURBES.

POUR ne perdre aucune des pensées que nous croirons pouvoir servir à l'intelligence de ce sujet, nous ne nous attacherons à aucun ordre ou suite de propositions déterminées, il faudra même le plus souvent ou supposer l'intelligence de quelques définitions & principes que nous n'aurons pas expliquez, ou bien les inserer avec nos propositions.

Définitions

NOUS appellons ligne ſimple celle qui étant ſur un plan, eſt telle que chacune de ſes parties peut convenir avec toutes les autres parties de la même ligne. Telle eſt la ligne droite & la circonférence du cercle.

Ligne compoſée eſt celle dont les parties n'ont point cette proprieté de s'ajuſter & convenir avec chacune des autres parties.

Mouvement uniforme eſt celui par lequel un mobile eſt porté d'une viteſſe toûjours égale à elle-même.

Mouvement irrégulier ou difforme, au contraire.

Puiſſance eſt une force mouvante.

Impreſſion eſt l'action de cette puiſſance.

La ligne de direction de l'impreſſion eſt celle par laquelle la puiſſance meut le mobile.

Nous appellons les impreſſions ſemblables, ou diverſes, ſuivant que leurs lignes de direction ſont entre-elles paralleles, ou ne le ſont pas, &c.

Or il ne faut pas croire que nous appellions une ligne, ligne ſimple, d'autant qu'elle eſt décrite par un mouvement ſimple : car, comme nous verrons dans la ſuite, non-ſeulement la circonférence du cercle, mais encore la ligne droite peut être entenduë avoir été décrite par un mouvement compoſé de tant de mouvemens qu'on voudra.

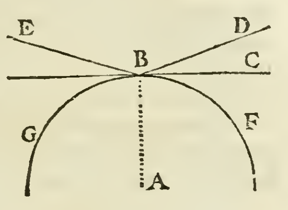
Nous avons encore défini la puiſſance en tant qu'elle nous peut ſervir conſidérant les diverſités des mouvemens, ce qui n'empêche pas que dans d'autres ſpéculations, nous n'entendions par le mot de puiſſance une force capable de ſoutenir un poids, ou de quelque autre effet.

Généralement en ce Traité nous conſidérerons deux choſes dans les mouvemens, leur direction, & leur viteſſe.

Axiomes.

LA direction d'une puissance mouvant un mobile, lequel par son mouvement décrit une circonférence de cercle, est la ligne perpendiculaire à l'extrémité du diamétre, au bout duquel le mobile se trouve.

Soit le mobile B, (qui par son mouvement décrit la circonférence G B F) au point B, à l'extrémité du demi-diamétre A B, auquel soit perpendiculaire la ligne B C. Je pose pour fondement que B C est la ligne de direction par laquelle se meut le mobile B en ce point-là. Et on en peut rendre une raison naturelle, qui est que l'on ne sçauroit prendre quelque autre ligne que ce puisse être, comme B D, sans tomber dans une absurdité : car puisque la nature ne souffre rien d'indéterminé, & qu'on ne sauroit prendre la ligne B D, qui fait l'angle oblique DBA, avec le demi-diamétre, que par la même raison l'on ne fût aussi obligé de prendre de l'autre part la ligne BE qui fait l'angle E B A, égal à D B A, (ce qui est absurde) il s'ensuit que la seule ligne qui puisse être prise pour la direction d'un tel mouvement sera la perpendiculaire BC, qui est la seule qui fasse angles droits avec le même demi-diamétre A B.



Ce raisonnement ne peut quadrer qu'à la circonférence d'un cercle.

D'où il s'ensuit que cette direction change à chaque point de la circonférence.

D'où il s'ensuit encore que si un mobile porté de G. vers B venoit à se détacher de la circonférence du cercle, comme si le demi-diamétre l'ayant porté de G en B, le lâchoit au point B, le mobile seroit porté avec

cette impression par la ligne B C.

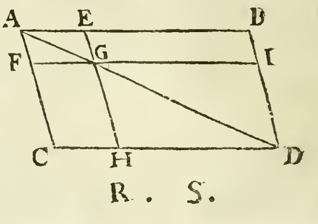
Et d'autant qu'il se rencontre que cette même ligne BC est la touchante du cercle au point B, nous prendrons pour principe d'invention qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent être, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce même point le mobile qui les décrit. En sorte que composant des mouvemens en diverses façons, & venant à connoître la direction du mouvement composé en quelque point que ce soit, d'une ligne courbe, nous connoîtrons par même moïen sa touchante.

Or nous entendons qu'un mouvement est composé de plusieurs mouvemens, lors que le mobile duquel il est le mouvement, est meû par diverses impressions.

THE'OREME I.

Proposition premiére.

SI un mobile est porté par deux divers mouvemens chacun droit & uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit & uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en même plan, en sorte que la ligne droite que d'écrira le mobile sera le diamétre d'un parallelogramme, les côtés duquel seront entre-eux comme les vitesses de ces deux mouvemens; & la vitesse du composé sera à chacun des composans comme le diamétre à chacun des côtés.



Soit le mobile A porté par deux divers mouvemens desquels les lignes de direction soient A B, A C, faisant l'angle B A C, & que les mouvemens droits & uniformes soient tel

qu'en même temps que l'impreſſion A B auroit porté le mobile en B, en même temps l'impreſſion A C l'eût porté en C. Je dis que le mobile porté par le mouvement composé de ces deux, ſera porté le long du diamétre A D du parallelogramme A D, duquel les deux lignes A B, A C, ſont les deux côtés, & que le mouvement qu'il aura ſur le diamétre A D ſera uniforme.

Ce que nous comprendrons, ſi nous nous imaginons que la ligne A B deſcendant toûjours uniformément & parallelement à la ligne C D, juſqu'à ce qu'elle ne ſoit qu'une même ligne avec la ligne C D; & la ligne A C ſe mouvant vers la ligne B D en la même façon, notre mobile A ne fait autre choſe que ſe rencontrer à tout moment en la commune ſection de ces deux lignes.

Or il eſt aſſez clair que les points de cette commune ſection ſont tous dans le diamétre A D ; ce que nous démontrerons encore mieux par cette conſidération. Imaginons-nous que le mobile A ſe mouvant uniformément ſur l'une des lignes A B ou A C, la même ligne ſe meut toûjours parallelement à ſoi-même. En cette ſorte ſi le mobile eſt meû ſur AB de A en B en même temps que AB deſcend juſques en C D ; & poſons le cas qu'en un certain temps le mobile ſoit arrivé en E, & qu'en ce même temps le côté A B ſoit deſcendu en ſorte qu'il faſſe une même ligne avec F I, dans laquelle prenons F G égale à A E (par notre ſuppoſition elle lui eſt auſſi parallele) donc le mobile A ſera en G : je dis que le point G eſt dans le diamétre AD du paralellogramme A B C D. Car par le point G ſoit tiré la ligne EGH qui achevera le petit parallelogramme AG. Puis donc que les deux mouvemens que nous conſiderons ſont uniformes, comme A B eſt à A E, ainſi AC eſt à AF ; & en changeant, A E eſt à A F comme A B à A C, & l'angle BAC eſt commun ; partant les deux parallelogrammes A D &

A G ſont ſemblables & à l'entour d'un même diamétre; & par conſequent le point G eſt dans le diamétre A D, ce qu'il falloit démontrer. Le reſte de notre propoſition n'eſt qu'un corollaire de ce que nous avons dit: c'eſt pourquoi nous ne nous y arreſterons pas plus long-temps.

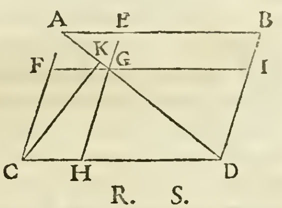
Mais nous remarquerons qu'en cette premiére compoſition de mouvemens & généralement en toutes les autres, nous pouvons conſiderer ſix choſes. Sçavoir trois directions qui ſont les deux ſimples, & la compoſée, & trois impreſſions qui ſont les deux ſimples & la compoſée.

Or ſi les trois directions nous ſont données, les trois impreſſions ſont auſſi données, c'eſt à dire les proportions de viteſſes des trois mouvemens; car A B, A C & A D, étant données, nous n'aurons qu'à prendre un point D dans A D, ligne de direction du mouvement compoſé, & par le point D tirer D B & D C parallele à A B & A C; & le parallelogramme étant ainſi achevé les proportions des mouvemens ſeront les mêmes que celles des deux côtés & du diamétre du parallelogramme.

Mais les trois impreſſions étant connuës, ou la proportion des trois lignes A B, A C, A D, nous ne connoîtrons aucune des directions, puis que pas une de ces lignes ne nous ſera donnée de poſition, quoi-que les angles qu'elles feront à leur rencontre nous ſoient donnés en eſpece. Or en ce cas il faut que deux des puiſſances quelles qu'elles ſoient, ſoient enſemble plus grandes que la troiſiéme, puis, que les lignes A B, A C, AD, qui ſont en même raiſon que les puiſſances, peuvent être les côtés d'un triangle.

Que ſi l'on nous donne deux directions, l'une de l'un des mouvemens compoſans, & l'autre du compoſé, nous ne connoîtrons rien de la troiſiéme, ni de la force des impreſſions, mais ſeulement nous aurons une raiſon

donnée telle que la raison de l'impression ou de la puissance composante qui nous est donnée à l'autre puissance composante ne pourra pas être plus grande car A C & A D nous étant données, aiant pris dans A C un point comme C, & de C aiant abbaissé CK perpendiculaire sur A D, la raison de A C à AB ne pourra pas être plus grande que la raison de la ligne AC à cette perpendiculaire C K, puisque cette perpendiculaire est la moindre de toutes les lignes qui veut être le troisiéme côté d'un triangle, l'un des deux autres étant A C, & le second une portion de la ligne A D.



Que si l'on nous eut donné deux mouvemens entiers, c'est-à-dire leurs directions & leurs vitesses, l'on nous eut aussi donné la direction & la vitesse du troisiéme; car aiant deux côtés d'un triangle & l'angle qu'ils contiennent, tout le reste nous est donné.

Pareillement nous étant donné deux directions telles qu'on voudra de deux mouvemens, & la raison de la vitesse du troisiéme à la vitesse de l'un des deux desquels nous avons la direction, nous connoissons les trois mouvemens, comme si l'on nous donne les directions A B, A C, des deux composans, & la raison de la vitesse du composé à A B comme de R à S, prenant dans la direction A B un point comme B, & faisant que comme S est à R, ainsi A B soit à un autre, nous trouverons la ligne A D. Donc si du centre A & de l'intervalle AD nous décrivons un arc de cercle qui rencontre la ligne B I D parallele à AFC en D. nous aurons les vitesses des trois mouvemens A B, A D, B D ou A C, &c. Les choses

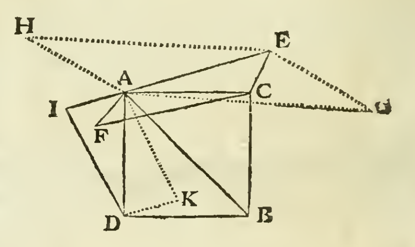
étant ainsi expliquées, nous énoncerons notre proposition plus généralement en cette sorte.

Proposition seconde.

UN mouvement composé de tant de mouvemens droits & uniformes qu'on voudra se fera par une ligne droite, & sera uniforme.

Ce qui est encore assez clair par ce que nous venons de dire; car prenant deux de ces mouvemens j'en composerai un seul, puis que par la précédente ces deux se doivent réduire en un, puis de ce composé consideré comme simple (car il n'importe, puis que les deux directions qui le composent ne font pas plus qu'une simple que nous pouvons concevoir) & d'un autre, j'en composerai un second, qui par ce moïen sera composé de trois; & ainsi en continuant je viendrai à en composer un seul de tant qu'il me plaira d'où il resulte.

Que tout mouvement uniforme & droit peut être entendu, ou comme simple, ou comme composé de tant d'autres mouvemens qu'on voudra.



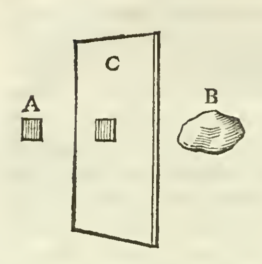
Où il faut remarquer que nous pouvons concevoir ce mouvement comme composé de divers autres, lesquels se feront en des plans différens, en sorte pourtant que le plus composé de tous soit dans le plan des deux que nous considérons comme les derniers qui le composent. Ainsi le mouvement A B peut être composé des deux A C & A D, dont l'un AC est composé de deux autres AE, AF, l'un

l'un desquels comme AE sera composé de deux autres A G & AH, & ainsi de tant qu'on voudra ; & le second des deux AD, que nous avons dit qui composoient le mouvement AB, peut être entendu comme composé de deux autres AI, AK, & encore chacun de ceux-là de deux autres, &c. en sorte que le mouvement AB sera composé de tant que l'on voudra, & même desquels les impressions seront données : car qui m'empêchera de décrire des parallelogrammes si différens qu'il me plaira, desquels les diagonales soient AB, AD, AC, AE, AH, A G, &c.

Et c'est ici un champ d'une infinité de belles spéculations, comme si aiant supposé que le mouvement A B est composé de cinq autres mouvemens, la vitesse de chacun desquels nous est donnée, l'on nous demande combien il est nécessaire de connoître de leurs directions pour déterminer chacun d'eux & les donner de position, & ainsi d'une infinité d'autres qui pourroient être telles que la recherche excédant la capacité de notre esprit, nous n'en pourrions pas donner les solutions.

Mais pour tirer de cette proposition des connoissances encores plus belles, nous allons expliquer par son moïen la nature des réfléxions & de la réfraction, aïant premiérement posé pour principe, qu'un mouvement pour composé qu'il soit de diverses impressions, aura le même effet qu'un autre causé par une seule impression, de laquelle la direction soit la même que de la composée, si l'un est aussi fort que l'autre.

Ceci étant posé, nous considérons dans les corps deux sortes d'impressions qui les peuvent faite mouvoir ; l'une qui les chasse d'un lieu vers un autre par violence : telle est celle que la raquette donne à la bale, la corde d'un arc à la fléche, &c. L'autre qui se fait par attraction des corps soit que cette attraction soit réciproque, ou non ; & cette derniére est de telle nature qu'elle ne peut jamais causer



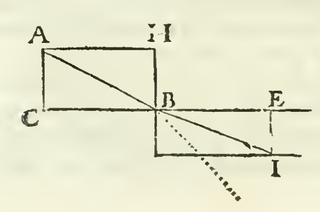
de réfléxion, comme si l'aiman B attirant le fer A, le fer s'approchant vient à rencontrer le corps C qui l'empêche de continuer son mouvement de A vers B, il s'arrêtera contre le corps C, le pressant continuellement, d'autant que l'attraction se faisant au travers de C, la vertu de l'aiman empêche le fer de rejaillir vers A; mais la nature de la premiére sorte d'impression est telle qu'un corps étant meû en cette façon, s'il vient à rencontrer un obstacle auquel il ne puisse pas communiquer son impression, l'obstacle la lui rend, ou pour mieux dire le détermine à retourner vers une autre part; & nous prendrons pour principe, que si un mobile rencontre un obstacle étant meû par une ligne perpendiculaire au même obstacle, il retournera vers le lieu duquel il étoit meû. Ainsi A. se mouvant vers D. par une ligne perpendiculaire à l'obstacle B C, & venant à rencontrer cét obstacle, auquel nous supposons qu'il ne puisse pas communiquer toute ou presque toute l'impression qui l'a fait mouvoir, il sera réfléchi par la même ligne DA, par laquelle il s'étoit meû mais en telle sorte que s'il n'a communiqué rien du tout de son impression à BC, & que BC ne lui en ait pas donné une nouvelle, il retournera avec autant de vitesse qu'il en avoit en D; que s'il a communiqué une partie de son impression à BC il ne retournera pas avec autant de vitesse qu'il en avoit en D. & enfin si l'ob-

ſtacle BC ne lui a pas ſeulement rendu l'impreſſion qu'il lui vouloit donner, mais encore l'a augmentée, comme ſi en D il a trouvé un reſſort, ou autre choſe, alors le mobile retournera de D avec plus de viteſſe qu'il n'en avoit, quand il eſt premierement parvenu au même point D.

Ce principe étant ainſi expliqué, nous n'aurons point de peine à entendre la nature de la réflexion. Car ſi nous penſons qu'une bale eſtant pouſſée d'A vers B, rencontre au point B la ſuperficie de la terre que nous ſuppoſons parfaitement plate & dure, pour ne nous point embarraſſer dans de nouvelles difficultez, laquelle l'empêchant de paſſer outre eſt cauſe qu'elle ſe détourne, & pour entendre de quel côté, puiſque ſon mouvement peut être diviſé en toutes les parties deſquelles l'on peut concevoir qu'il eſt compoſé, imaginons-nous qu'il le ſoit des deux A C & A H, ou C B, deſquels le premier fait deſcendre la bale de A en C, & le ſecond la porte de la gauche A C, vers la droite; & parce que la rencontre de la terre eſt tout-à-fait contraire à l'un de ces mouvemens A C, & qu'elle n'eſt point oppoſée à celui qui l'a fait aller de la gauche vers la droite, il eſt certain que ſi le mobile eût été meû ſeulement par ſon propre poids ſur un plan incliné, comme AB, étant arrivé en B, ou il ſe fût arrêté tout court, ou ſuivant ſa figure & les degrez d'impreſſion qu'il auroit, il eut roulé le long de B E, mais parce que le mouvement de la bale eſt un mouvement violent, & que par notre principe ſi elle eût été portée le long de H B, elle ſeroit remontée de B, en H: au lieu que nous avons compoſé le mouvement A B des deux C B & H B, puis que le mouvement H B eſt changé en B H,

composons un mouvement de deux, dont l'un soit CB ou BE que nous prenons égal à CB & l'autre EF & aïant décrit le parallelogramme HE, tirons la diagonale du point B, où se fait la refléxion en montant vers F, nous trouverons que la bale remontera en autant de temps par la ligne BF, qu'elle en aura mis à descendre par la ligne AB; en sorte que l'angle de réfléxion sera égal à celui d'incidence, car supposant que la bale n'ait rien perdu de son impression, & n'en ait point aquis de nouvelle, son mouvement n'a fait que changer de direction: mais si elle eût rencontré un corps qui lui eût cedé, en sorte que lui communiquant de son impression elle en eût tout autant perdu, il eût fallu composer un mouvement de BE, & d'un autre moindre que EF, comme EG; auquel cas l'angle de réflexion auroit été moindre que celui d'incidence. Et posé que la bale eût rencontré un corps capable d'augmenter son impression, comme une raquette, ou un ressort, son mouvement auroit été composé de BE, & d'un autre comme EI plus grand qu'EF en montant, auquel cas l'angle de réfléxion auroit été plus grand que celui d'incidence.

Et ce même raisonnement se peut aussi-bien accommoder à l'opinion de ceux qui tiennent que la bale ou tout autre missile aïant communiqué toute son impression à l'obstacle, elle réjaillit ou par la force du ressort qu'elle rencontre dans l'obstacle ou par celle du ressort qui est en elle-même, ou par toutes les deux.



Venons à la réfraction, & supposons que la bale rencontre en B, non plus la superficie de la terre, mais une toile si déliée qu'elle ait la force de la rompre en perdant seule-

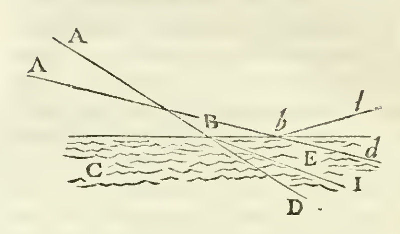
ment une partie de ſon impreſſion ; & parce qu'elle ne doit rien perdre de celle qui la fait aller de la gauche vers la droite, d'autant que la toile ne lui eſt point oppoſée en ce ſens là, ſuppoſons qu'elle perd la moitié de l'impreſſion qui la fait deſcendre, en ce cas il faudra continuer B E égale à C B, & prendre E I égale à la moitié de A C, de ſorte que la diagonale B I ſera le chemin que ſuivra le mobile aprés ſa réfraction ; & pareillement ſi la viteſſe A C eut été augmentée, par éxemple, de la moitié, comme ſi le mobile paſſant de l'air eût entré dans un autre milieu de telle nature qu'il eût pû s'y mouvoir une fois auſſi vîte, en ce cas nous aurions fait E I double de A C, B E demeurant égale à B C, &c. ce que l'on voit expliqué bien au long dans les Auteurs.

Or il faut remarquer avec ſoin cette façon de compoſer, & mêler les mouvemens, puis que nous voïons que des perſonnes le plus exercées dans la recherche des vérités Mathématiques ſe ſont trompées en cét endroit ; ainſi *M. Des Cartes* pour expliquer la réflexion, décrit un cercle du centre B, qui paſſe par A, & trouve que le point de la circonférence auquel le mobile retournera en autant de tems qu'il a mis à aller de A vers B doit être F ; au lieu que d'un raiſonnement ſemblable au nôtre il devoit en tirer comme une conſequence, que le point F dans cette hypotheſe ſe rencontrera dans la circonférence du cercle d'écrit du centre B par A.

Secondement, expliquant la réfraction de la bale dans l'eau, il a confondu les termes d'impreſſion ou viteſſe, & de détermination, leſquels pourtant il avoit diſtinguez peu auparavant ; car en la page 17. ligne derniére, il dit *& puis qu'elle ne perd rien du tout de la détermination*, &c. *Diſc. 2. de la Dioptr.*

Troiſiémement, il ſemble qu'il explique mal dans la page 19. la réflexion de la bale ſur la ſuperficie de l'eau ; car il eſt vraiſemblable que lors que la bale

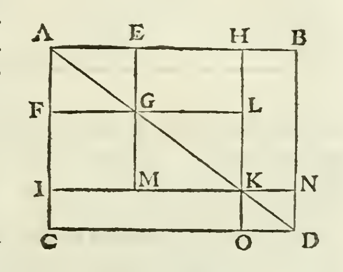
A B entre dans l'eau, & que la réfraction se fait vers I, c'est à cause que la bale entrant dans l'eau au point B, & voulant continuer son chemin vers D, rencontre d'un côté l'angle CBD obtus, & de l'autre côté l'angle EBD aigu, & trouve plus de corps, & partant plus de résistance du côté de l'angle obtus que du côté de l'aigu : ainsi elle se détourne par un chemin un peu courbe vers I, lequel elle ne quite plus lors qu'elle est assez enfoncée dans l'eau : car bien qu'il y ait toûjours plus d'eau au dessous de B I, que non pas au dessus, néanmoins à cause de son enfoncement, elle trouve la résistance d'une part aussi forte que de l'autre, ce qui fait qu'elle continuë à se mouvoir vers I.



Mais lors qu'elle entre dans l'eau par la ligne A *b* trop inclinée, d'autant qu'avant d'être parvenuë dans l'eau en un endroit auquel la différence de la résistance des deux parties de l'eau lui fut insensible, il faudroit qu'elle eut (pour ainsi dire) labouré un long sillon d'eau, & agi pendant trop long-temps contre la résistance de l'eau du côté inferieur ; de sorte que par cette action elle perd l'impression de s'enfoncer davantage; & sa figure que nous supposons être ronde, quoi qu'elle tienne de la nature & des propriétés d'un coin qui fendroit l'eau, la porte vers la partie la plus foible, c'est-à-dire vers la superficie supérieure de l'eau, & quelquefois au dessus de la même superficie ; ce qui est assez intelligible.

Voïez ce que dit *M. Des Cartes* sur ce sujet dans les pages 21, 22. & les suivantes.

L'on pourroit déduire un grand nombre de belles conclusions de cette proposition du mouvement composé de deux droits : mais puisque dans ce petit Traité notre but principal est de tirer du mélange des mouvemens une méthode générale pour trouver les touchantes des lignes courbes, nous ne nous arrêterons pas davantage à cette proposition.

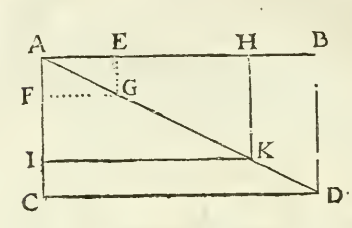


Mais avant que de passer outre, nous remarquerons deux choses : la premiére, que le diamétre AD eut pû être décrit par un point porté de deux mouvemens droits AB, AC, desquels ni l'un ni l'autre n'eût été uniforme. Il eut pourtant fallu qu'à mesure que l'un, comme A B, eût été augmenté ou diminué, la vitesse de l'autre eût été changée à proportion, comme si le mobile eût été porté en A B d'un mouvement fort lent depuis A jusques à E, & d'un fort vîte depuis E, jusques en H, &c. pour lui faire décrire la ligne A D, il auroit fallu qu'aïant divisé AC en même raison qu'A B dans les points F & I, la ligne A B eût descendu fort lentement d'A vers F, & fort vîte de F vers I ; ce que l'on pourra mieux conçevoir, si l'on considere le mobile en G, comme devant en même temps être porté de deux mouvemens uniformes, & desquels les vitesses sont entre-elles, comme les lignes G L & G M le long des mêmes lignes G L & G M, &c.

Secondement, il nous sera facile de voir que si le mo-

bile eût été porté sur les lignes A B, A C par deux mouvemens droits, mais différens l'un de l'autre, en telle sorte que les parties de l'un n'eussent pas eû toûjours même raison avec les parties de l'autre, en ce cas le mobile eût décrit une ligne courbe; comme si les deux mouvemens eussent été difformes ou disproportionnés, lors que le mobile étant en E dans la ligne A B, il eût été en F, dans la ligne AC, & qu'étant en H, il eût aussi été en I, la ligne décrite par le mouvement mêlé de ces deux auroit été la courbe A G K D, &c.

Mal expliqué, mais facile à entendre.



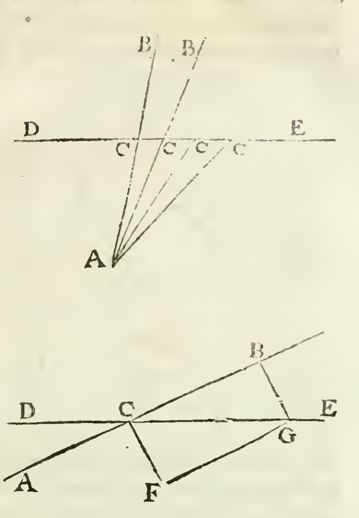
Et cette considération ne sera pas des moins utiles pour la recherche des touchantes des lignes courbes, comme l'usage le fera découvrir.

Proposition Troisiéme.

BIEN que ce que nous avons dit jusques ici des mouvemens mêlez pût suffire pour nous en faire comprendre la nature, néanmoins puis que leur connoissance est un principe d'invention pour quantité de belles vérités, il sera peut-être à propos d'en considérer ici divers autres mélanges, quoique tout ce que nous en dirons ait une grande étenduë, à cause que ce ne sont ici que les élemens de cette science.

Nous avons expliqué dans les propositions précédentes comment une ligne droite peut être entenduë décrite par un mouvement uniforme mêlé de deux droits & uniformes, ou par un mouvement inégal mêlé de deux droits & difformes, &c.

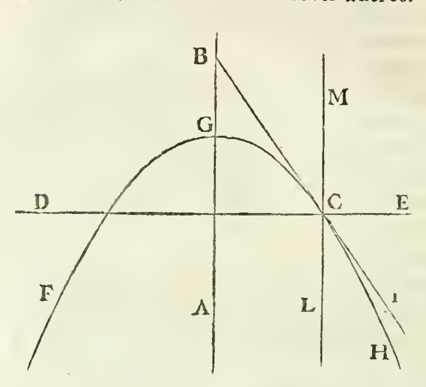
Or



Or la même ligne droite peut aussi être entenduë d'écrite par une infinité d'autres mouvemens, par exemple, par un mouvement droit & un circulaire, comme si la droite ACB se mouvant circulairement autour du centre A, un point, comme C, est porté dans la même ligne en sorte qu'il se trouve toûjours dans la commune section de la même ligne AB, & d'une autre DE: nous dirons que la ligne DE est décrite par un mouvement mêlé d'un droit qui se fait le long de la ligne AB, & d'un circulaire que la même ligne AB communique au mobile qui le décrit par son mouvement droit; & ces deux mouvemens sont tels, quoique bien difformes, que si l'on nous donne de position le point A & la ligne DE, quelque point que l'on prenne dans la ligne DE, la proportion de l'un de ces mouvemens à l'autre sera donné.

Car aïant prolongé la ligne AB par delà la ligne DE, comme en B si du point C auquel nous voulons connoître la proportion de ces deux mouvemens, nous tirons CF perpendiculaire à AB, nous aurons la direction du mouvement circulaire qui se fait en C; mais les deux autres directions sont données, AB du mouvement droit simple, & DE du mouvement composé. Donc les trois

impreſſion nous ſont données, ou la proportion de chacun des mouvemens aux deux autres.

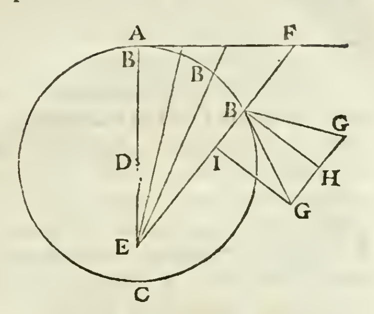


Nous pouvons encore imaginer que la même ligne eſt décrite par un mouvement mêlé de deux, l'un parabolique, l'autre droit, deſquels nouspourrons en comprendre, un uniforme comme ſi la parabole étant portée par un mouvement droit, en ſorte que l'un de ſes diamétres ſoit toûjours ſur la ligne AB, un point C ſe promene de telle ſorte dans la parabole, qu'il ſe maintienne toûjours dans la ligne DE; & en ce cas ſi la touchante de la parabole en C. nous eſt donnée; nous connoîtrons ces trois mouvemens, c'eſt-à-dire les viteſſes de chacun des trois comparé aux deux autres, puiſque leur trois directions nous ſont données, où vous remarquerez que la direction du mouvement droit ſimple eſt la ligne AB, c'eſt-à dire, une ligne LCM parallele à AB.

Ce que nous avons dit de la parabole ſe doit encore entendre du cercle, de l'hyperbole, de l'ellipſe, & généralement de toute autre ligne; de ſorte que la ligne DE pouvant être entenduë décrite par un mouvement compoſé d'une infinité de mouvemens droits, & chacun de ceux-là d'un droit & d'un circulaire, ou d'un droit & d'un parabolique, &c. vous voyez que la même ligne pourra être décrite par une infinité de mouvemens, cha-

cun différens en espéce de tous les autres.

Et pour montrer que nous pouvons dire du cercle, de la parabole, & d une infinité de lignes courbes, ce que nous avons dit de la droite; soit la circonférence du cercle A B C, le centre du cercle D, & un point E dans le cercle autre que le centre, & soit tirée la ligne EDA: vous voïez donc que si la ligne E D A tourne autour de E, & qu'en même temps un point B se promene sur la même ligne, en sorte qu'il se maintienne toûjours dans la circonférence A B C, cette circonférence sera décrite par le mélange d'un mouvement droit & d'un circulaire. Et vous voïez encore, que si l'on veut sçavoir la raison de ces deux mouvemens l'un à l'autre, la touchante de la circonférence nous étant donnée en un point, cette raison nous sera donnée en ce même point, comme si la touchante A F nous est donnée au point A, & la position de la ligne E D A, nous verrons que cette ligne étant perpendiculaire à A F, elle est la ligne de direction du mouvement circulaire simple, qui se fait à l'entour du point E; mais elle est aussi la direction du mouvement circulaire composé, puis qu'elle touche la circonférence A B C, par laquelle se doit faire ce même mouvement composé; d'où il s'ensuit que le mobile qui décrit la circonférence A B C par son mouvement, n'a au point A qu'un seul mouvement circulaire, duquel la direction est A F.



Mais si l'on donne la touchante B G en un autre point de la circonférence, comme en B, le point E étant encore donné, nous menerons la ligne E B, qui sera la direction du mouvement droit, & B H sa perpendiculaire sera la direction du mouvement circulaire simple à l'entour du point E; mais la direction du mouvement composé est aussi donnée, sçavoir la touchante B G, nous connoitrons donc la vitesse de ces trois mouvemens, & nous comparerons chacun deux au deux autres.

Comme au contraire, si l'on nous eût donné les points E & B, & la raison du mouvement droit au mouvement circulaire simple, comme de G H à B H, nous aurions trouvé la touchante du cercle.

Il nous sera aussi facile de concevoir que la même circonférence peut être décrite par un mouvement droit & un parabolique, ou par un droit & un hyperbolique, &c. comme nous avons dit de la ligne droite.

Et pour finir en deux mots cette spéculation, nous pourrons dire de la parabole, de l'hyperbole, & des autres lignes courbes, ce que nous avons expliqué du cercle.

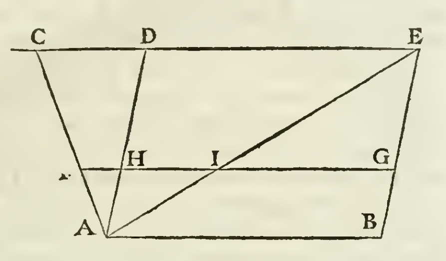
Proposition quatriéme.

Toute cette proposition est mal digerée, & il vaut mieux la passer que de s'y arrêter.

SI deux lignes droites faisant l'une avec l'autre tel angle qu'on voudra, viennent à se mouvoir parallelement chacune à soi-même, en telle sorte qu'elles se puissent toûjours couper l'une l'autre, & que la vitesse de la premiére soit donnée dans la seconde, & la vitesse de la seconde donnée dans une troisiéme, qui fasse tel angle qu'on voudra au point de leur départ: le point qui se rencontrera toûjours dans leur commune section sera porté par trois mouvemens, deux desquels étant réduits à un, l'on trouvera que le mouvement de ce point dans la seconde

ligne aura été hâté, quoique toûjours uniformement, en ſorte que par le mouvement composé de ces trois, il aura décrit une ligne d'un mouvement uniforme, &c.

Cette propoſition ſeroit extraordinairement longue, c'eſt pourquoi nous expliquerons le reſte ci-après.



Suppoſons que la droite A B comprenant tel angle qu'on voudra en A avec la droite A D, l'une & l'autre de ces deux lignes viennent à ſe mouvoir parallelement à ſoi-même & uniformement, AB vers D, & AD vers B, & que la viteſſe de la ligne DA ſoit donnée dans AB & la viteſſe de AB, ſoit donnée dans une troiſiéme ligne AC, en telle ſorte que lors que le point A de la ligne D A ſera arrivé en B, en même temps le point A de la ligne BA arrivera en C. Je dis que le point qui ſe rencontre toûjours en la commune ſection des deux lignes AB, AD ſera porté par trois mouvemens droits, l'un par la ligne AD, & les deux autres par la ligne A B, en ſorte que ladite ligne A B étant prolongée à l'infini, il parcourra une plus grande ligne ſur A B, qu'il n'eût fait ſi la viteſſe du point A de la ligne A B eût été donnée depuis A juſques en D, & que la ligne qu'il décrira par le mouvement mêlé de ces trois ſera le diamétre A E du parallelogramme D B, & que ſon mouvement ſur A E ſera uniforme.

La premiére partie de cette propoſition eſt aſſez intelligible de ſoi-même, car quand nous ne donnerions point de mouvement à la ligne D A, & que la ligne

A B se mouvant, en sorte que son bout A décrivant la ligne A C, un point fût porté le long de AB, commençant son mouvement en A à telle condition qu'il dût toûjours être en la commune section des deux A B, A D; il est clair que ce point auroit deux mouvemens sur la ligne A D, l'un A C, par lequel la ligne A B s'efforceroit de le porter d'A vers C. l'autre C D, par lequel il seroit ramené de C vers D, pour décrire la ligne A D. Mais si ces deux mouvemens étant ainsi prouvés, nous faisons encore mouvoir la ligne AD vers B, ce point aura encore un mouvement par lequel il suivra la ligne A D: il est donc vrai qu'il a trois mouvemens, &c.

Ce que nous pouvons encore examiner en cette sorte, posé que le point A de A B dût parcourir A D, & que A de A D dût parcourir A B, il est certain que le point qui se rencontreroit toûjours sur leur commune section seroit porté par deux divers mouvemens, comme nous avons démontré en notre premiere proposition: mais faisant que le point A de A B décrive A C, au lieu de A D, ce point a encore un mouvement par lequel la ligne A B s'efforce de le porter le long de A C, ainsi pour lui résister il faut qu'il se hâte davantage sur A B en sorte qu'il y décrive une plus grande ligne qu'il n'eût fait, si A de A B eût parcouru A D: donc le point a trois mouvemens, &c.

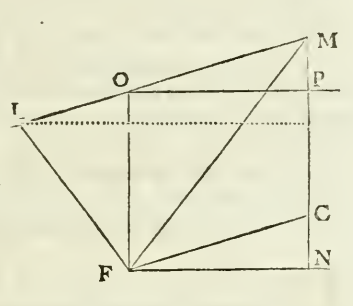
Or nous démontrerons en cette façon que le mouvement composé de ces trois est droit & uniforme, & le long du diamétre A E. Car aïant tiré la ligne F H I G parallele à A B coupant, &c. lors que le point A de A B sera en F, si la ligne A D n'a pas changé de place, le point de la commune section aura eû deux mouvemens uniformes A F, F H, que nous réduirons à un seul AH, par la premiére proposition, en sorte que ce point sera en H, de la ligne A H D. Mais en même temps le point

H de A H D a été porté en I par un mouvement uniforme H I : donc ce point de commune ſection a été porté par deux mouvemens uniforme A H, H I ; & partant par la premiére propoſition il a décrit la ligne A I, &c.

Notez qu'il n'étoit pas beſoin de tirer F G, & que le même argument ſe pouvoit faire des lignes A C, C D, & les aïant réduites à A D, compoſer un mouvement des deux A D, & D E.

Cette propoſition ſe doit entendre tres-généralement.

Ainſi ſi la ligne FC ſe meût parallelement à ſoi-même & uniformement, en ſorte que ſon point F, décrive la ligne F L, & qu'en même temps la ligne F O ſe meuve parallelement à ſoi-même & uniformement, en ſorte que ſon bout F doive décrire la ligne F N, le point de commune ſection des deux lignes F C, F O, aura décrit la diagonale F M du parallelogramme O C. Quoique ce point ait été porté de quatre divers mouvemens, * car les deux mouvemens qu'il a en F O, l'un par lequel il court de F vers O, l'autre par lequel la ligne F O tâche de le reculer pour lui faire décrire F N, ces deux mouvemens, dis-je, ſe réduiſent à un ſeul FC, (car F C eſt le diamétre d'un parallelogramme F N C) & les deux mouvemens qu'il a en F C, l'un par lequel décrivant la ligne F C, il eſt porté de F vers C, l'autre par lequel la ligne F C tâche de lui faire décrire la ligne FL, ces deux mouvemens, dis-je, ſe réduiſent à un ſeul droit & uniforme F O. Donc tous



ces quatre mouvemens étant réduits aux deux FC, FO, par la premiére proposition, par la même proposition le point de commune section des deux lignes F C, F O, aura décrit la ligne F M, qui est ce qu'il falloit démontrer.

* *Je dirois ainsi : Le point* F *en* F C, *se mouvant vers* L M, *a deux mouvemens droits & uniformes*, F L, L O, *qui composent un mouvement droit* F O.

Semblablement ledit point F *en* F O, *se mouvant vers* N M, *a deux mouvemens* F N, N C, *qui composent* F C.

Donc des deux mouvemens F O, F C, *sera composé un mouvement* F M, *qui sera composé de tous ces quatre, &* F M *est diagonale, &c.*

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-être de quantité d'autres lignes.

PROBLEME I.

Proposition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétez spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura consideré avec un peu d'attention.

Regle

Regle génerale.

PAR les propriétez spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens composéz en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les éxemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monsieur Paschal, de la Roulette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

Premier éxemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquiéme méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole étant donnez de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet: soit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & soit FB égale à AF la même ligne BFA sera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du

centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole passera par les points E.

Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne A E prolongée comme en D, & la ligne E I perpendiculaire à AB, & encore la ligne H E parallele à à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne A E, & l'autre est la ligne H E sur laquelle il se meût de même vitesse que le point I dans la ligne B A, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne A E par la construction, puisque A E est toûjours égale à B I. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connuë, sçavoir suivant les lignes droites A E D, H E données de position, si vous divisez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C: qui est le diamétre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE AE,) la ligne L E C sera la touchante.

Avant que de passer outre, remarquez deux choses.

La premiére, que nous n'avons pas voulu confidérer le point E comme commune fection de deux lignes, dont lignes, dont l'une A E infinie fe meut circulairement autour du point A; l'autre I E auffi infinie defcend parallement à foi-même, aïant toûjours fon extrémité I dans la ligne B A, puifqu'il a été plus facile de confidérer les mouvemens A E, H E du point E en chaque endroit de la fection de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens A E, H E fon égaux l'un à l'autre, ce qui fera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'enfuit pas que tous les mouvemens d'un point E foient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en aiant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du fommet. Vous entendrez la même chofe en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. propofition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, pofons qu'il foit vrai que L E C touche la Parabole en E. Si donc nous abaiffons l'ordonnée E I, I F fera égale à F C, & ajoûtant F B à I F, & F A à C F, les toutes C A & I B feront égales (car les ajoûtées le font par la conftruction) mais I B eft égale à A E par notre conftruction, donc C A & A E font égales, & l'angle A C E égal à l'angle A E C; mais par notre conftruction nous avons divifé l'angle A E H en deux également, & par conféquent nous avons fait AEC, C E H égaux entr'eux, donc A C E eft égal à C E H fon alterne, ce qui eft vrai, car par la conftruction E H, eft paralelle à C I.

Ou fi vous aimez mieux, puifque CI, EH font paralleles, l'angle A C E eft égal à C E H; mais par la con-

ſtruction C E H eſt égal à A E C, donc A C E & AEC, ſont égaux, & le triangle A C E iſoſcéle, donc C A eſt égale à A E. Mais encore par la conſtruction A E eſt égale à B I, C A eſt donc égale à B I, & en ôtant les égales A F, B F, C F ſera égale à F I, & par conſequent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi l'on nous eût donné la deſcription de la parabole par un point, comme E ſe promenant le long de la ligne I E du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE deſcend parallelement à ſoi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le quarré de I E eſt toûjours égal au rectangle ſous I F, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas eſt le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la ſeconde I E trouver le mouvement qui ſe fait dans la troiſiéme F I, ce qui eſt un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore propoſer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ſes propriétez, ce qui ſeroit plus difficile.

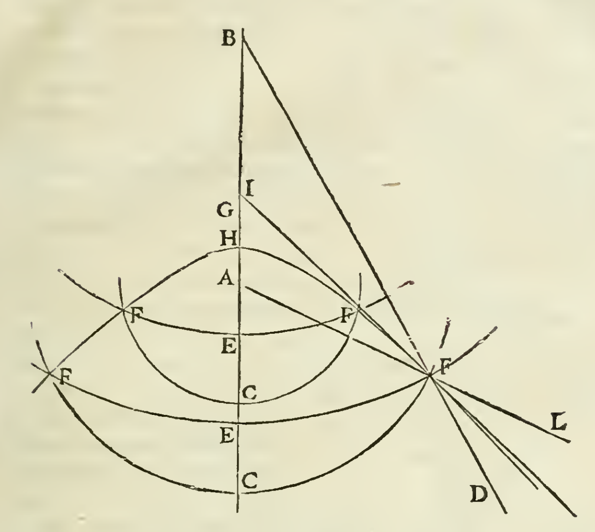
Second éxemple des touchantes de l'Hyperbole.

NOUS la décrirons avec M. Myd. liv. 2. prop. 26. en cette ſorte.

Le ſommet & le deux foyers ou points de comparaiſon de l'Hyperbole étant données de poſition, décrire l'Hyperbole par des points dans le même plan.

Soient les foyers A B, & H le ſommet, donc la ligne droite A B paſſera par H. Prenons H G égale à HA, & prenons dans H A, prolongée, s'il en eſt beſoin, tant de points que nous voudrons, comme E, par leſ-

quels de B comme centre décrivons des arcs de cercle



EF, & du centre A & de l'intervale, dont chaque point E est éloigné de G, d'écrivons d'autres arcs de cercle CF, qui coupent les premiers, comme en F, l'Hyperbole passera par tous les points F.

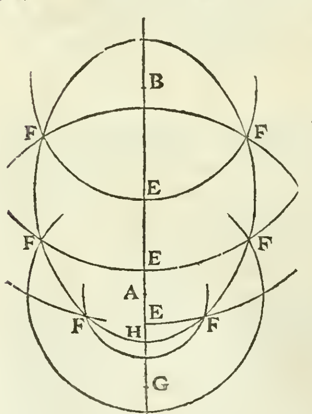
Cela posé, si je veux tirer la touchante de l'hyperbole, comme en F, aiant prolongé AF, comme en L, & BF, comme en D, sans m'amuser à considérer que l'hyperbole est décrite par le point F, qui est toûjours la commune section des deux lignes droites BFD, AFL, lesquelles se meuvent circulairement, la premiére autour du centre B l'autre au tour du centre A, je vois qu'en quel lieu que je prenne le point F, si je le considére décrivant l'hyperbole à commencer du som-

met, il a deux mouvemens; l'un, par lequel il s'éloigne d'A, le long de la ligne A L; l'autre par lequel il s'éloigne de B le long de la ligne BD. Puis donc qu'il s'éloigne également d'A & de B, & que les deux directions sont F L, F D, aiant fait un rhombe duquel l'angle soit D F L, c'est à sçavoir, aiant divisé l'angle D F L, en deux parties égales pour avoir le diamétre de ce rhombe, qui sera la direction du mouvement composé, la ligne MFI qui partage cet angle sera la touchante de l'hyperbole.

Apoll. démontre liv. 3. prop. 48. que l'angle I F A est égal à l'angle I F B.

Troisiéme exemple des touchantes de l'Ellipse.

VOICY comme M. Myd. la décrit par sa cinquiéme méthode générale, l. 2. prop. 27.



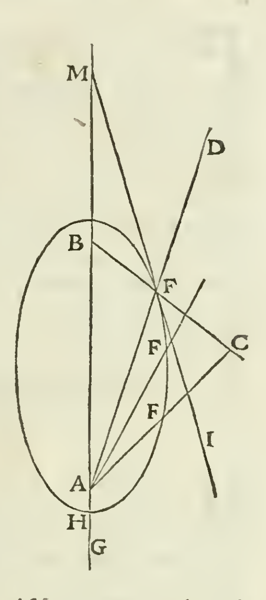
Les deux foyers, & l'un ou l'autre sommet de l'ellipse étant donnez de position, d'écrire l'Ellipse par des points touvez sur le même plan.

Soient les foyers ou points de comparaison A & B, & H le sommet.

Donc la droite A B prolongée passera par H, soit pris H G égale à AH, & du centre B de tant & de tels intervales qu'on voudra plus grands pourtant que A H, & moindres que B H, comme B E, décrivez des arcs de cercle, comme E F, & du centre A & de l'intervalle, qui est entre cha-

cun de ces arcs, & le point G décrivez d'autres arcs qui coupent chacun des premiers, comme en F, l'Ellipſe paſſera par les points F F.

L'Ellipſe étant ainſi d'écrite, s'il faut tirer ſa touchante comme en F, aiant tiré les lignes B F C & A F D, ſoit que je conſidére les deux mouvemens du point F en B C, & A D, ou comme s'éloignant de B dans F C, auquel cas il s'approche d'A dans F A, ou comme s'éloignant d'A dans F D, auquel cas il s'approche de B le long de FB, puiſque le point F s'éloigne autant de l'un des points AB, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens ſont B F C, & A F D, je n'ai qu'à diviſer l'un des deux angles A F C, ou B F D en deux également par la ligne I F M, elle ſera la touchante de l'Ellipſe.



Apoll. dans la même 48. du troiſiéme veut que l'angle A F I ſoit égal à l'angle B F M, ce qui s'accorde à notre méthode, car les angles A F C, B F D (au ſommet l'un de l'autre) étant égaux, leurs moitiez A F I, B F M le ſeront auſſi, ce qu'il falloit démontrer.

J'oubliois de mettre en deux mots la conſtruction de ces trois éxemples, pour ſervir de régle générale.

Pour tirer les touchantes des ſections coniques.

POUR la Parabole, étant donné le ſommet & le foyer par le point où vous voulez la touchante, tirez une ligne parallele à l'axe, & une autre ligne juſques au foyer, diviſez en deux également des quatres angles que ces deux lignes font, les deux que le parabole coupe, la ligne qui fera cette diviſion ſera la touchante.

Pour l'Hyperbole & l'Ellipſe, les deux foyers étant donnez par le point où vous voulez la touchante, tirez deux lignes aux deux foyers des quatre angles que ces lignes feront en ce point, diviſez en deux égalément les deux oppoſez que la ſection conique coupe, la ligne qui fera cette diviſion ſera la touchante.

Quatriéme éxemple des touchantes de la Conchoïde de deſſus, de Nicomede.

BIEN que l'on puiſſe décrire une infinité de lignes courbes, chacune deſquelles ſera conchoïde & aſymptote à une même ligne droite, ſi eſt-ce que nous n'en conſidérons que de deux ſortes ou genres, ſuivant qu'elles ſont décrites, ou entre leur pole & la ligne droite, qui leur ſert de baſe, régle ou aſympote, ce que nous appellons la conchoïde de deſſous; ou que cette ligne droite ſoit entre le pole & la conchoïde, ce que nous appellons la conchoïde de deſſus, ou de Nicomede; parce que, quoique leurs courbures ſoient toutes différentes les unes des autres, n'éant moins la méthode pour en trouver les touchantes n'en conſidére que ces deux cas.

Vous remarquerez que le pole de la conchoïde ne peut pas être dans la ligne qui ſert de régle ou de baſe à la conchoïde, car la ligne qui ſeroit décrite de cette ſorte

ſeroit

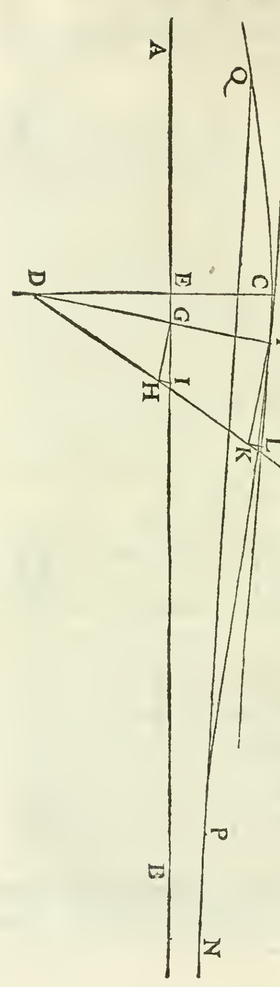
ſorte ſeroit un demi-cercle, dont la ligne droite qu'on auroit priſe pour baſe de la conchoïde, ſeroit le diamétre, &c.

La Conchoïde de deſſus ſe décrit en cette façon.

Soit la droite infinie AD à laquelle il faut tirer une conchoïde, de laquelle le ſommet ſoit C. Du point C tirez C D perpendiculaire à AB coupant A B en E, & dans C D prenez un point comme D, en ſorte que la ligne A B ſoit entre les deux points C & D, puis de D tirez quantité de lignes occultes, comme D G F, D I H, &c. vers la ligne A B qui la rencontrent en GIL &c. puis prenez les lignes G F, I H, L K, chacune égale à EC, la Conchoïde paſſera par les points F H K &c.

Aïant ainſi décrit la Conchoïde, il ſera facile d'en tirer les touchantes, par éxemple au point F.

Conſidérons que la conchoïde eſt décrite par deux mouvemens du même point ; l'un par lequel il monte le long de la ligne



D F ; l'autre par lequel la ligne D F ſe mouvant circulairement ſur le centre D , emporte le même point de C par F vers K ; & bien que nous ſachions que les directions de ces deux mouvemens ſont l'une la ligne D F pour le mouvement droit , l'autre F K perpendiculaire à D F par notre principe, pour le mouvement circulaire , ſi eſt-ce que nous n'en ſçaurions découvrir la raiſon ne le conſidérant que dans la conchoïde ſi nous connoiſſons la touchante de la conchoïde, qui eſt la direction du mouvement compoſé de ces deux. Cela nous oblige à éxaminer ou les mêmes mouvemens, ou d'autres qui leur ſoient proportionnez hors de la conchoïde.

Or il eſt très-facile de les examiner dans la ligne droite, qui eſt la régle ou baſe de la conchoïde, ſi nous conſide-

rons qu'elles est décrite par un point G, qui monte dans la ligne D G F, autant que fait le point F dans la même ligne D G F; car puisque les lignes E C, G F sont égales par la construction, l'excés de la ligne D F sur la ligne D C est le même que l'excés de D G sur D E. Donc le point E est autant monté allant de E jusqu'à G, que le point F allant de C jusqu'à F. Et pour le mouvement circulaire de G, non-seulement nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement droit G, leurs deux directions & celle de leur mouvement composé nous étant données, mais aussi nous sçaurons la raison qu'il a avec le mouvement circulaire F en cette façon.

Tirez G H perpendiculaire à D G; d'un point de DH comme H, tirez H I paralelle à D G, qui couppe la regle E G B en I: vous avez donc la raison du mouvement circulaire G au mouvement droit G, comme de G H à H I; & puis que le mouvement droit G est égal au mouvement droit F, reste d'avoir la raison du mouvemens circulaire F au mouvement circulaire G; & parce que ces mouvemens sont entr'eux comme les circonférences de leurs cercles, c'est-à-dire en même raison que leurs demi-diamétres D F, D G, il faut donc faire que comme D G à D F, ainsi G H soit à une ligne prise dans F K. Or la constructions en est très aisée car vous n'avez qu'à tirea la ligne DHK rencontrant F K en K, d'autant que les triangles DGH, D F K seront semblables. Vous avez donc la raison du mouvement circulaire F au mouvement droit F, comme de FK à KL ou H I. Donc si par K vous tirez KL parallele à DF, & égale à H I; puisque les deux FK, KL sont les directions des deux mouvemens F, & en même raison que ces deux mouvemens, la droite L F étant menée, elle sera la direction du mouvement composé de ces deux, c'est-à-dire, la touchante de la Conchoïde; ce qu'il falloit faire.

En deux mots le Pole D & la régle A B de la Conchoïde étant donnez de position, & un point de la Conchoïde F, tirez DF qui coupe A B en G, sur les points G & F, tirez G H & F K perpendiculaires à D F, faites l'angle F D K aigu *ad libitum*, tirant la ligne D K qui couppe G H en H, & F K en K, tirez H I paralelle à D F coupant A B en I, puis tirez K L égale & parallele à H I, le point L sera dans la touchante au point F.

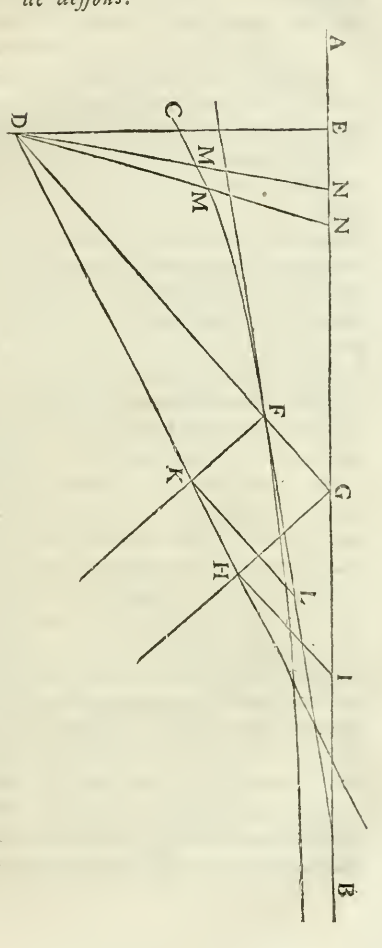
Remarquez que d'autant que la Conchoïde change de courbure, le point L se peut rencontrer entre la Conchoïde & sa base ou régle A B, puis qu'en ce cas le convexe étant en dedans, la ligne L F la touche aussi en dedans entre la droite AB.

Remarquez encore qu'au lieu que les touchantes du Cercle, de la Parabole, de l'Hyperbole & de quantité d'autres lignes ne rencontrent ces mêmes lignes qu'au point de l'atouchement; en la Conchoïde tout au contraire la ligne FL étant prolongée vers L coupera la Conchoïde prolongée vers N, & la touchante d'un point du convexe en dedans, comme de P, étant prolongée du côté du sommet C de la Conchoïde, rencontra la conchoïde comme en Q, ce qui est évident, puisque ces touchantes (excepté celle du sommet C) n'étant point paralleles à la ligne AB, rencontrent nécessairement la même ligne; & partant, puis que l'inclinaison de la touchante FL est vers L, & que la Conchoïde passe entre L & AB, elle rencontrera nécessairement la Conchoïde, & la coupera vers L comme en N, ce que la touchante du point P ne pourra pas faire, quoi qu'elle ait son inclinaison sur AB, de même côté que L: d'autant que vers cet endroit elle est plus proche de A B que n'est pas la Conchoïde, mais elle rencontrera la Conchoïde vers le sommet C, ou au-delà, comme en Q, d'autant qu'elle s'éloigne de A B vers ce côté-là, où au contraire la Conchoïde commence en C de s'en approcher.

Cinquiéme éxemple des touchantes de la Conchoïde de deſſous.

NOus nous ſervirons mot à mot de la régle de l'éxemple précédent; & pour en faire l'application, il ne faut que ſçavoir d'écrire cette ligne.

Soit en cette la figure la ligne droite & infinie A B, que nous prenons pour la régle ou baſe de notre Conchoïde de deſſous, & d'un point de la même ligne comme E, ſoit la perpendiculaire E D à la même ligne, dans laquelle perpendiculaire prenons deux points C & D, le plus proche C pour le ſommet de notre Conchoïde, & le plus éloigné D pour ſon Pole: alors aïant tiré au point D quantité de lignes occultes DMN, qui coupent AB en N, ſi en chacune de ces li-



gnes D M N de ſon point N, nous prenons N M égale à C E, nous aurons dans chacune de ces lignes un point M, par lequel notre Conchoïde eſt décrite.

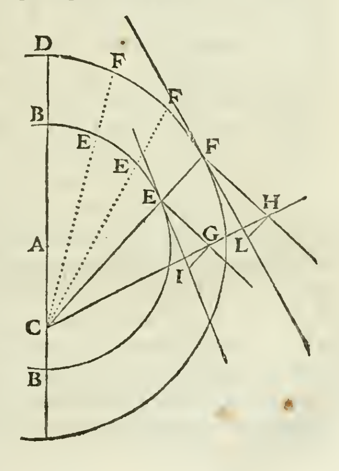
Cela poſé, puis que la ſeule différence, que nous remarquons entre les deux mouvemens du point qui décrit cette ligne, & les deux qui décrivent ſa baſe, d'une part; & les mouvemens ſemblables qui décrivent la premiére Conchoïde, & ſa baſe n'eſt autre, ſinon qu'en celle-ci le mouvement circulaire de la ligne eſt moindre que le mouvement circulaire de ſa baſe, au lieu qu'en l'autre le mouvement circulaire qui décrivoit la ligne étoit le plus grand, & qu'en l'une & l'autre le mouvement droit de la ligne eſt égal au mouvement droit qui en décrit la baſe, & qu'encore en l'une & l'autre l'on peut comparer le mouvement circulaire de F au circulaire G par le moïen d'une ligne D K H, qui fait un angle aigu G D H arbitraire avec la ligne G D, & laquelle ligne D K H coupe les lignes G H, F K perpendiculaires à la ligne D G aux points H & K: voulant tirer la touchante de cette ligne en un point, comme en F, je tire la ligne D F, que je prolonge juſques à ce qu'elle rencontre la régle A B en G, & ſur icelle des points F & G je tire deux perpendiculaires F K, G H, qu'une ligne arbitraire D H coupe en K & en H; du point H je tire H I parallele à D G coupant AB en I. J'ai donc, comme nous avons déja dit au précédent exemple, la raiſon du mouvement circulaire du point G de la ligne D G (poſé que ce point doive décrire la régle A B) au mouvement droit du même point, comme G H à H I; mais ce mouvement étant G H, le mouvement circulaire du point F de la ligne D F G décrivant la Conchoïde ſera F K, & le mouvement droit du point F eſt égal au mouvement droit du point G: je tire donc K L égale & parallele à H I; & puis que la Conchoïde, & par conſéquent ſa

touchante eſt décrite par un mouvement mêlé des deux F K, K L, la ligne L F ſera ſa touchante au point F ; ce qu'il falloit faire.

Sixiéme éxemple de quelques autres Conchoïdes.

L'ON peut décrire des Conchoïdes aux lignes courbes auſſi-bien qu'à la ligne droite ; & pour en trouver les touchantes, il faut premiérement connoître la touchante de la ligne courbe, qui eſt comme la régle ou baſe de la Conchoïde : or nous n'avons pas eû beſoin d'une touchante de la régle ou baſe aux deux éxemples précédens, parce qu'à proprement parler il n'y a que les lignes courbes qui aïent des touchantes ; l'on peut néanmoins dire que la ligne droite n'aïant point d'autre touchante, elle peut être conſidérée comme ſe touchant ſoi-même, & que c'eſt en cette façon que nous l'avons conſidérée aux deux éxemples précédents.

Pour donner une éxemple de ces Conchoïdes, ſoit propoſé un cercle duquel le rayon eſt AB, le centre A, & ſoit pris un point dans A B, prolongée, ou non, comme C, lequel nous prendrons pour le Pole de notre Conchoïde ; puis aïant prolongé C A B hors le cercle, comme en D, ſoit pris B D arbitraire pour l'intervalle de notre Conchoïde ; enfin du Pole C tirons quantité de lignes occultes C E F coupant



le cercle en E, & prenons du point E dans lesdites lignes les intervalles EF égaux à BD, & d'une même part que BD, c'est-à-dire, en dehors du cercle si nous avons pris D en dehors dans le diamétre prolongé, ou en dedans si le point D a été pris en dedans cette Conchoïde passera pars le point F F F &c.

Or il est fort facile de tirer la touchante de cette ligne si nous considérons qu'elle est déctite par un mouvement mêlé d'un droit & d'un circulaire, desquels la direction nous étant donnée, il est très-facile de trouver la raison de l'un à l'autre; car si nous voulons tirer une touchante de cette ligne en un point comme F, aïant tiré la ligne CF qui coupe la circonférence du cercle en E, & des points FE aïant tiré les perpendiculaires FH, EG sur la ligne CF; il est aisé de remarquer que la ligne CBD aïant tourné sur le centre C, & aïant changé la position par laquelle elle n'étoit qu'une même ligne avec CEF, son point B est descendu en E, pour décrire le cercle, & son point D est descendu en F, pour décrire la Conchoïde du cercle, & qu'il s'ensuit que la ligne CEF est la direction du mouvement droit de chacun de ces points & de celui qui décrit le cercle, & de celui qui en décrit la Conchoïde, & les lignes EG, FH sont les directions des mouvemens circulaires. Or les mouvemens droits sont égaux, puis que la différence des lignes CD & CF est égale à celle des lignes CB & CE, de sorte qu'il ne reste qu'à connoître la quantité de l'un de ces mouvemens droits, & la raison des mouvemens circulaires entr'eux. Pour cet effet tirez EI touchante du cercle, & CH qui fasse un angle aigu avec CF (comme nous avons fait en la Conchoïde ci-dessus) & qui coupe EG, FH en GH, les directions des trois mouvemens EC, EG, EI étant données trouvez-en les proportions, ce que vous ferez tirant

rant G I parallele à C F, le mouvement droit du point E ſera G I, & ſon mouvement circulaire ſera E G : mais le mouvement circulaire étant E G, le mouvement circulaire du point F eſt F H (à cauſe que ces deux mouvemens ſont entr'eux, à ſçavoir E G à F H, comme le demi-diamétre C E eſt à C F) vous n'avez donc qu'à prendre H L égale & parallele à G I, pour le mouvement droit du point F, & tirer la ligne de direction L F de celui que les deux F H & H L compoſent, & vous aurez la touchante de cette Conchoïde ; ce qu'il falloit faire.

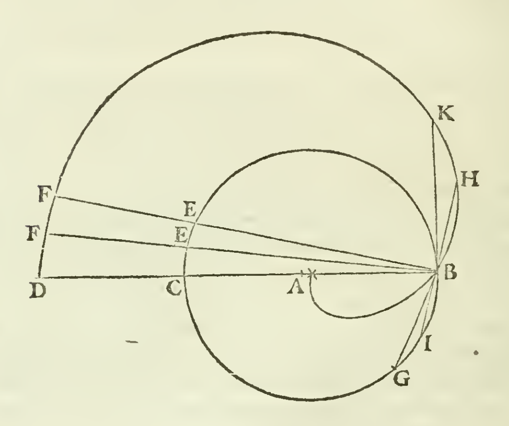
Dans la figure de cet exemple nous avons pris le point C au dedans du cercle, & le point D en dehors : nous euſſions pû les prendre ou tous deux en dedans, ou tous deux en dehors, ou le Pole en dehors, & le point de l'intervale en dedans. De plus nous pouvions prendre l'intervale plus grand ou plus petit, de ſorte que notre Conchoïde eût fort approché de la figure d'une Ellipſe. Enfin de quel intervale que nous euſſions décrit notre Conchoïde, ſi nous euſſions pris pour ſon Pole le point A centre du cercle, il eſt évident que notre ligne eût auſſi été un cercle : mais ces choſes étant très-faciles, la méthode d'en tirer les touchantes n'aïant en toutes ces lignes qu'une même application, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Mais nous remarquerons en paſſant, que l'on peut tirer des Conchoïdes par cette même méthode, & en tous ces divers cas à l'Ellipſe & aux autres ſections coniques, & généralement à toutes les lignes courbes, même aux Conchoïdes &c. & en tout ces cas l'application de notre mêthode de tirer les touchautes ſera toûjours la même, ſi nous ſuppoſons qu'on nous ait donné la touchante de la ligne principale, dont nous examinons la conchoïde, ou des propriétez ſpécifiques pour la trouver,

Septiéme exemple, du Limaçon de M. P.

C'est encore une espéce de Conchoïde de cercle, de laquelle voici la description.

SOIT proposé le cercle C G BE, duquel le centre est A, le diamétre B C prolongé autant qu'il sera besoin, comme en D soit pris B pour le Pole de notre

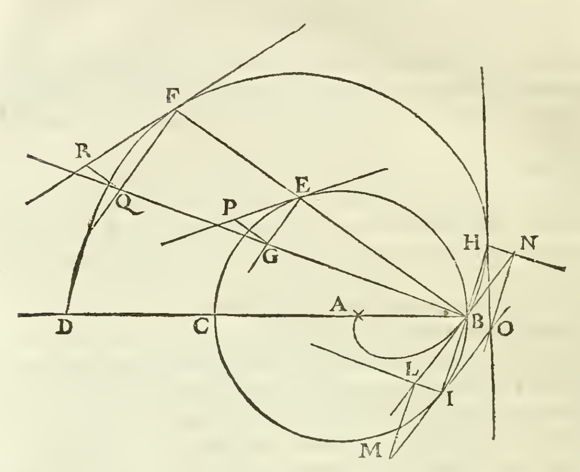


Limaçon, & CD pour l'intervale duquel on se doit servir pour le décrire, moindre que le diamétre. De B tirez quantité de lignes occultes BEF, qui coupent la circonférence du cercle en E, & prenez EF en chacune de ces lignes égale à CD, & de même côté, le Limaçon passera par tous ces points FF. Or il faut remarquer que l'on prend autant d'intervalles que l'on peut à commencer de la partie convexe du cercle, qui est d'un même côté que le Limaçon au regard de la ligne D C B, & que voulant

continuer cette ligne il faut prendre les points E dans l'autre demi-circonférence, qui a sa concavité tournée vers le Limaçon, ainsi le point B du Limaçon est le réciproque du point G de la circonférence du cercle lors que B G est égale à C D; & le dernier point du Limaçon que nous avons marqué d'une petite * est le réciproque du point C, & les points du Limaçon d'entre B & * sont les réciproques des points de la circonférence G C, comme les points les plus proches de B audessus du diamétre CB dans le même Limaçon, sont les réciproques des points de la circonférence G B, ainsi H est le réciproque du point I jusqu'au point K qui est le réciproque du point B, & vous voïez par là la vérité de ce que nous avions remarqué que l'intervalle C D ne doit pas être plus grand que le diamétre CB, car autrement l'on ne pourroit pas décrire la portion * B du Limaçon, même selon les divers intervales que l'on auroit pris, on n'auroit pas pû décrire la portion du même Limaçon la plus proche de B au dessus du diamétre C B. Il est vrai que pour ce qui est de cette méthode des touchantes, il ne nous importe point que cette ligne soit grande ou petite, entiére & terminée en un point du demi-diamétre A B, ou tronquée &c. parce que les mouvemens de la description de l'une & de l'autre de ces lignes étant par tout les mêmes, l'on en donne les touchantes de la même façon. Mais voulant examiner un autre moïen de décrire cette ligne, & dire quelque chose de son usage, ce que nous ferons ci-après, il y a fallu ajoûter cette restriction.

Il est aussi facile de tirer les touchantes de cette ligne que des Conchoïdes prêcedentes, la méthode en est la même, & les deux mouvemens, l'un droit, l'autre circulaire, qui décrivent cette ligne, se doivent examiner de la même façon: car il faut considérer que la

ligne BEF se mouvant circulairement autour du Pole B jusqu'à ce qu'elle ait la position de BCD, les deux points E & F s'éloignant de B, montent dans la ligne

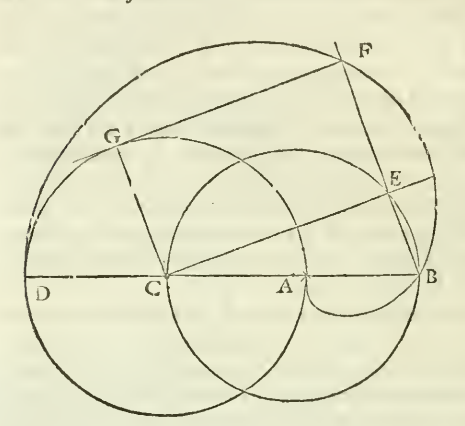


vers D: or puisque E F est égale à C D, la différence des lignes B E, B C est égale à la différence des lignes B F, B D; d'où il suit que le point E qui décrit le cercle a le même mouvement droit dans la ligne BEF, que le point F qui décrit le Limaçon, de sorte que connoissant le mouvement droit du point E nous connoîtrons aussi le mouvement droit du point F: il reste donc à examiner les mouvemens circulaires de ces deux points, desquels les directions sont perpendiculaires à la ligne B E F. Tirez donc les perpendiculaires EG & FQ, & prenez dans EG sa partie EG *ad libitum*, pour la quantité du mouvement circulaire du point E, tirez encore la ligne BGQ, puis faites que comme le demi-diamétre B E est au demi-dia-

métre BF, ainſi EG ſoit à QF (ce qui ſe fera par le moïen de la ligne BGQ, faiſant un angle aigu *ad libitum* avec BF ; & coupant EG en G, & FQ en Q) ſuppoſé donc que le mouvement circulaire E ſoit EG, la quantité du mouvement circulaire F ſera FQ ; mais ſuppoſé EG pour la quantité du mouvement E, l'on trouve que le mouvement droit E eſt égal à GP (ce qui ſe fait, aïant tiré la touchante du cercle PE, par le moïen de la ligne GP parallele à BE, & coupant la touchante en P) comme nous avons rémarqué, & le mouvement droit de F eſt égal à celui de E, comme nous l'avons expliqué ci-devant. Suppoſé donc FQ pour la quantité du mouvement circulaire F, le mouvement droit ſera GP, c'eſt à-dire QR égale & parallele à GP; le point R eſt donc donné, & par même moïen RF pour la direction & la quantité du mouvement mêlé des deux FQ, QR, c'eſt-à-dire, notre touchante ; ce qu'il falloit faire. (*Voïez la Fig. préced.*)

Remarquez qu'on doit toûjours examiner les deux mouvemens dans le cercle au point réciproque de celui de la Conchoïde, pour lequel nous cherchons la touchante ; comme par exemple, ſi l'on vouloit tirer la touchante du Limaçon au point H aſſez proche de B, aïant tiré la ligne HB, & l'aïant prolongée juſqu'à ce qu'elle coupe le cercle en I, qui ſera dans le cercle le point réciproque du point H, comme C eſt réciproque de D, car par la conſtruction HI eſt égale à CD, il faudra examiner les deux mouvemens du point I, & en aïant trouvé la raiſon, chercher la raiſon de ſon mouvement circulaire au mouvement circulaire de H &c. En deux mots imaginant que la ligne HI tourne ſur le point B, & que la partie BI eſt portée en dedans du cercle vers C, aïant tiré la perpendiculaire IL vers le côté de C, & par conſéquent la perpendiculaire HN vers l'autre côté, pour

les deux directions circulaires ; puis aïant trouvé la raison des deux mouvemens I, comme de IL à LM (par le moïen de M I touchante du cercle BIC) &c. il faudra faire que comme B I est à B H, ainsi I L soit à H N, puis aïant pris N O égale & parallele à LM, la ligne O H menée par le points O & H, sera la touchante de notre Limaçon.



L'on peut dire que cette ligne est décrite par le moïen d'une double équerre CEFB, de laquelle les côtez CE, E B sont prolongez autant qu'il est besoin. Or il n'est pas besoin que chacun d'eux soit plus grand que le diamétre C A B du cercle C E B, & l'autre côté E F est toûjours égal à l'intervale que l'on prend de chaque point du cercle jusqu'à son réciproque dans le Limaçon ; de sorte que faisant tourner l'angle droit C E B, en sorte que son point E décrive le demi-cercle C E B, ce qui se fait lui donnant diverses positions, & toutes dans un même plan, & à condition que la ligne C A B doive être toûjours l'hypotenuse des triangles rectangles qu'elle fera avec les parties de GE & E B, l'on n'a qu'à marquer dans le même plan tous les points que

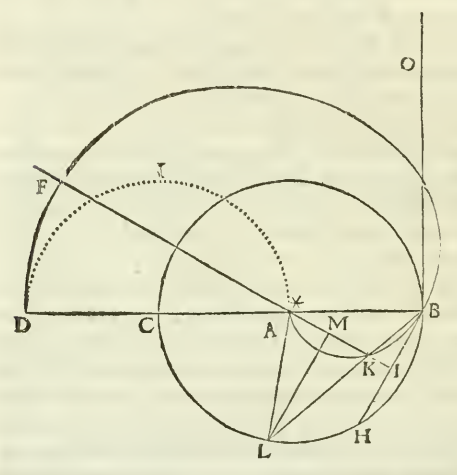
le point F de la double équerre aura décrit.

Or ſur cette ſuppoſition l'on trouvera les touchantes de cette ligne de la même façon que nous avons déja fait, parce qu'encore qu'on ne conſidére pas le point F, comme ſe promenant le long de la ligne BEF, & même que cette ligne tourne circulairement ſur le Pole B, l'on ne laiſſe pas de connoître les deux mouvemens que lui donne la ligne BEF, qui en cette ſeconde ſuppoſition tournant ſur le point B, s'éleve en même temps peu à peu pour conduire l'angle droit B E C de B en C ſur la circonférence du demi-cercle B E C.

Mais voici une des belles ſpéculations qui ſe puiſſe ſur la deſcription de cette ligne, & par le moïen de laquelle elle a été trouvée par le ſieur de Roberval.

Soit propoſé le cercle C E B, & l'intervalle C D comme aux figures précédente : du point C & de l'intervale C D ſoit décrit le cercle DG*; je dis que ſi ce dernier cercle D G* eſt la baſe d'un Cone ſcalene du ſommet duquel, que nous appellerons S, la perpendiculaire SB tombe en B ſur le plan du cercle DG*; aïant tiré des touchantes GF à ce cercle, & du point S tiré des lignes S F perpendiculaires à ces touchantes, que chacun des points F fera dans notre Limaçon, ou ſi vous aimez mieux que la ligne qui paſſe par tous ces points FF eſt la même que le Limaçon du cercle C E B, dont le Pole eſt B, & l'intervale eſt C D. Car ſi du point B vous joinez la ligne BF, il eſt certain par un coroll. de la 6. du 11. qu'elle ſera perpendiculaire à G F. Du centre C tirez CE parallele à G F, & qui coupe BF en E; GE ſera donc un parallelogramme réctangle, & la ligne E F ſera égale à C G, c'eſt-à-dire à C D; mais l'angle C E B étant auſſi droit, il eſt dans un demi-cercle décrit ſur le diamétre C B. Il s'enſuit donc que nous trouverons toûjours un même point F, ſoit aïant décrit le cercle D G*, &

ayant tiré sa touchante GF & de S sommet du Cone aïant mené la ligne SF, soit aïant décrit un cercle CEB, & tiré la ligne BEF coupant le cercle en E, & pris EF égale à DC demi-diamétre du premier cercle: mais nous avons montré que trouvant des points F par cette seconde méthode, nous décrivons le Limaçon du cercle CEB, & partant trouvant les points F de la premiére façon, puisqueces points sont les mêmes, nous décrirons aussi notre Limaçon; ce qu'il falloit démontrer.



Je dirai en passant une propriété de la petite portion de cette ligne qui est telle que si l'on prend l'intervale DC égale au demi-diamétre CA, du cercle auquel on décrit le Limaçon, & que de cet intervale l'on décrive le Limaçon, sa petite portion * B servira à couper un angle rectiligne proposé en trois parties égales. Cette propriété est du sieur Paschal.

Car soit proposé l'angle DBH, dans l'une des deux lignes, qui le contient, comme DB, je prends le point *, duquel j'abaisse * I perpendiculaire sur l'autre ligne BH,

BH, & qui coupe la partie * KB du Limaçon (décrit du Pole B au cercle dont le centre eſt *, le rayon * B & l'intervale du même Limaçon CD eſt égal à * B) en K, je tire la ligne BKL, je dis qu'elle fait avec la ligne BH l'angle KBH $\frac{1}{3}$ de l'angle propoſé CBH.

Pour le prouver ſoit décrit le cercle du Limaçon & la ligne BK prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence dudit cercle en L, tirez L *, & ayant diviſé * K *bifariam* en M, joignez LM, laquelle ſera perpendiculaire ſur * K; car à cauſe du Limaçon, le triangle *LK a les côtez L*, & LK égaux, étant égaux à un même CD. Puis donc que les triangles LMK, BIK ſont réctangles, & ont les angles oppoſez égaux, ils ſont ſemblables, & l'angle MLK égal à IBK, mais MLK n'eſt que la moitié de l'angle * LK (parce que le triangle *LK eſt iſoſcele, & ſa baſe * K diviſée *bif.* &c.) c'eſt-à-dire, de * BL, (car le triangle * LB eſt encore iſoſcele) & partant l'angle KBH n'eſt que $\frac{1}{2}$ de l'angle * BL, & partant $\frac{1}{3}$ du tout * BH; ce qu'il falloit démontrer.

Nota ſi l'on eût propoſé l'angle obtus HBO en ayant ôté l'angle droit DBO, & pris HBK $\frac{1}{3}$ du reſtant, il ne faut que luy ajoûter un angle de 30 degrez qui eſt $\frac{1}{3}$ de l'angle droit, pour avoir le tiers du total propoſé DBO.

Monſieur de Roberval démonrre que l'eſpace contenu ſous la ligne droite DC * (ſoit que DC ſoit égale ou non à C *) & ſous la courbe * KBFFD eſt égal à l'aggregé du cercle BHC, duquel la ligne * KBFD eſt le Limaçon, & du demi-cercle duquel l'intervale de cette même ligne CD eſt le demi-diamétre, de ſorte que ſi du centre C & de l'intervale CD l'on décrit le demi-cercle DN * l'eſpace curviligne contenu entre cette demi-circonférence, & le Limaçon eſt égal au cercle BHC, dont cette ligne eſt la Conchoïde.

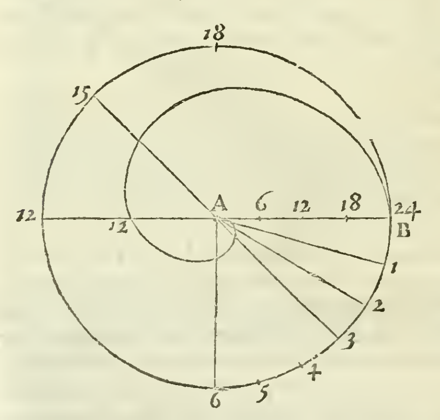
Si l'on continuoit cette ligne de l'autre côté du cercle,

elle repréſenteroit une ſorte de figure en cœur diviſé en deux ſuperficies curvilignes, deſquelles l'on pourroit faire un ſemblable examen, les comparant à des portions de cercles, &c.

De la Spirale ou Hélice.

LA premiére définition du Livre des Spirales d'Archiméde nous apprend le moyen de décrire cette ligne ; voicy les termes d'Archiméde.

Si recta linea in plano, manente altero termino, æquè velociter circunducta rursùs reſtituatur in eum locum à quo primùm cœpit moveri ; & unà cum lineà circumductà, punctum feratur æquè velociter ipſum ſibi ipſi, in eadem linea, incipiens à termino manente ; ejuſmodi punctum ſpiralem lineam in plano deſcribet.

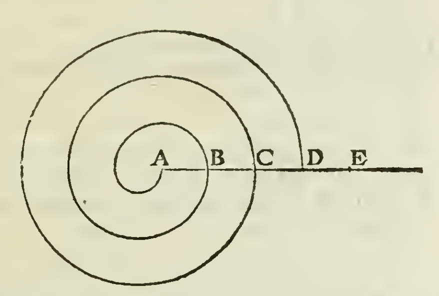


Soit propoſé la ligne A B égale à l'intervale duquel on veut décrire la Spirale du centre A & de l'intervale AB décrivez le cercle B 3, 6, 12, 18, 24, diviſez-en la circonférence en autant de parties égales que vous pourrez commodément, à commencer en B, & diviſez la ligne AB en tout autant

de parties égales; tirez les rayons A1, A2, A3, &c. du point A sur le rayon A1 prenez une des parties aliquotes du rayon AB; sur le rayon A 2 prenez deux des mêmes parties; 3 sur A 3, 12 sur A 12, 15 sur A 15, & ainsi des autres, les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres seront dans la Spirale que vous voulez décrire.

Que si dans la même ligne AB vous prenez BC, CD, DE &c. tant que vous voudrez, chacune égale à AB, & que cependant qu'AB fera une seconde révolution du mouvement uniforme, le point qui étoit venu en B s'avance du mouvement uniforme sur la ligne ABCD jusques en C, ce point décrira l'Hélice de la seconde révolution à commencer en B & finir en C, & ainsi de suite pour les autres révolutions.

D'où il s'ensuit que la méthode est la même pour les autres révolutions que pour la premiére; car voulant décrire la seconde révolution, il faudra



décrire du centre A de l'intervale AC une circonférence de cercle, & l'ayant divisée en autant de parties que la premiére circonférence du rayon AB, à quoi les mêmes rayons tirez du centre A aux points de la premiére circonférence serviront s'ils sont prolongez, & chacun pris égal à AC; sur le rayon A 1 de cette seconde circonférence, vous prendrez depuis le centre A une ligne égale à AB+1 de ses parties aliquotes, sur A 2 vous prendrez une ligne égale à AB+2 de ses parties aliquotes &c. &

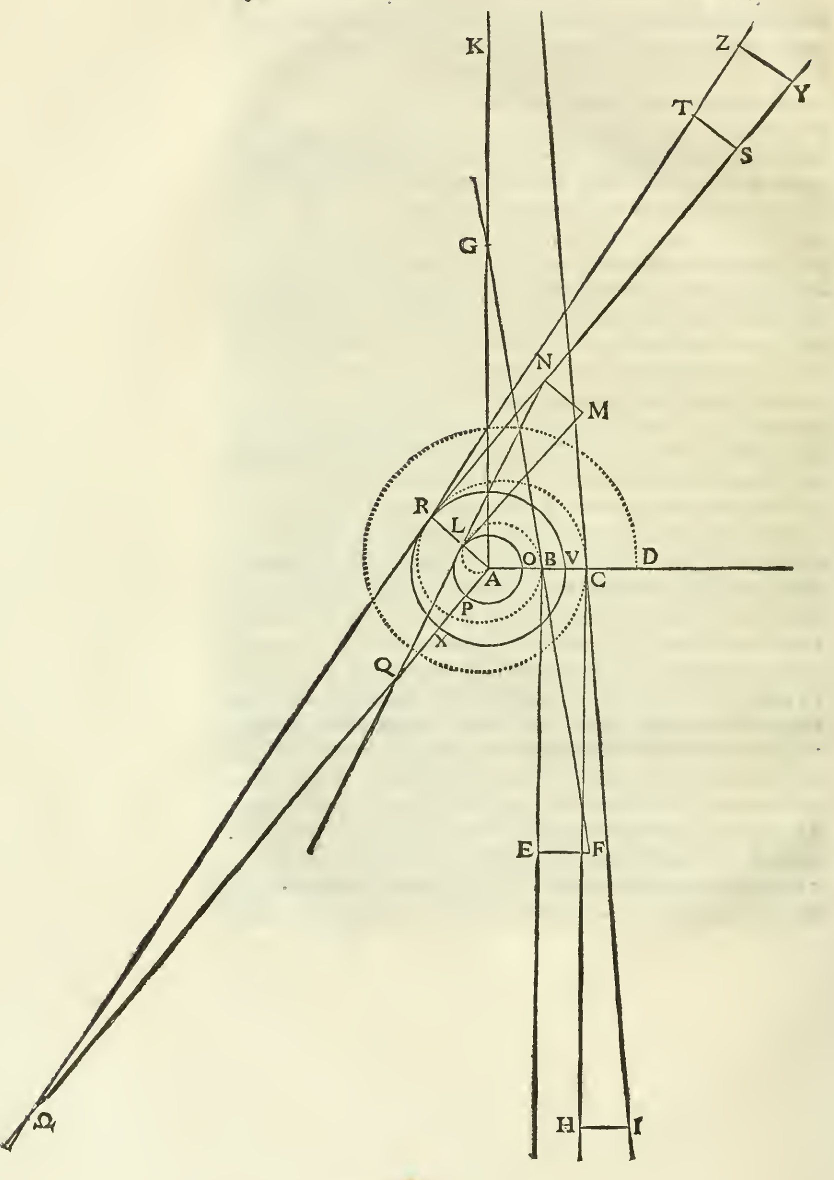
ainsi les points que vous aurez marquez sur les demi-diamétres de ce second cercle seront ceux par lesquels il faudra décrire la seconde révolution de l'Hélice.

Ceci posé, il faut considérer que le point qui décrit la Spirale, en quelque part qu'il se trouve, a toûjours le même mouvement droit sur la ligne ABCDE, & ce mouvement est tel par la nature de cette ligne, qu'en même temps que la ligne AB a fait une révolution, ce point doit en même temps avoir parcouru une ligne égale à AB, mais en chaque endroit il change de mouvement circulaire; de sorte que la vitesse de son mouvement circulaire s'augmente toûjours à mesure qu'il s'éloigne du centre A; car son mouvement circulaire est tel que ce point décriroit la circonférence dont la portion de la ligne ABCDE, depuis A jusqu'où ce point se rencontre, est le demi-diamétre pendant le temps d'une révolution, c'est à sçavoir en autant de temps qu'il en employe à parcourir par son mouvement droit la ligne AB depuis A jusques en B, ou de B en C, de sorte que puisqu'en B son mouvement est tel que s'il en eût toûjours eû un circulaire égal depuis A jusques en B, il auroit décrit une circonférence dont AB est le rayon pendant le temps d'une révolution, & que le mouvement circulaire qu'il a en C est tel que pendant le temps d'une révolution (ou s'il faut ainsi dire d'une circulation de la ligne droite, car le terme de révolution s'attribuë plus ordinairement à la Spirale même) il auroit décrit une circonférence dont le rayon est AC double de AB, il s'ensuit que le mouvement circulaire qu'il a en C est double de celui qu'il a en B, & que celui qu'il a en D est triple de celui qu'il en B &c. & ainsi des autres.

Et parce que le mouvement circulaire de ce point est tel, comme nous avons dit, que pendant le temps d'une circulation de la ligne ABCD, il doit décrire une cir-

conférence de cercle dont la ligne depuis le commencement A de la Spirale jusqu'à l'endroit de la Spirale où ce point se trouve, est le demi-diamétre : & de plus le même point doit décrire par son mouvement droit pendant le même temps d'une circulation, une ligne égale au rayon AB du cercle de la premiére circulation ; il s'ensuit que, quelque point de la Spirale que nous prenions, nous aurons la raison du mouvement circulaire du point qui la décrit au mouvement droit du même point, comme de ladite circonférnce à la ligne AB, mais aussi les deux directions de ces movemens sont données (le commencement de la Spirale & le point où l'on veut la touchante étant donnez) car la direction du mouvemnt droit est la ligne droite tirée de A jusqu'audit point, & la direction du mouvement circulaire est la perpendiculaire à cette ligne; ces deux mouvemens sont donc tou-à-fait connus, & par conséquent le mouvement mêlé de ces deux & sa direction, c'est-à-dire, la touchante de l'Hélice en ce point est aussi donnée ; ce qu'il falloit faire.

Ainsi pour tirer la touchante en B, je joins AB, & je tire BE perpendiculaire à AB, laquelle BE je suppose étre égale à la circonférence, dont AB est le rayon ; puis ayant mené EF parallele & égale à AB, la ligne FB touchera l'Hélice au point B. Et quand bien l'on auroit quelque difficulté à concevoir cette méthode, il nous sera toûjours facile de montrer qu'elle s'accorde avec les démonstrations des Anciens. Nous avons ainsi démontré que cette façon de trouver les touchantes des sections coniques s'accorde avec celle d'Apollonius, & nous démontrerons ici que notre construction s'accorde avec les propositions d'Archiméde : car soit AG perpendiculaire à AB, il est évident que FB prolongée la rencontrera en un point comme G, puisqu'elle rencontre BE sa parallele par la construction, & partant l'angle AGB


K
Z
Y
T
S
G
N
M
R
L
O
B
V
D
A
C
P
X
Q
E
F
Ω
H
I

ſera égal à l'angle EBF, & ces triangles ſemblables ; mais le côté AB eſt égal au côté EF, & partant AG ſera égal à BE, c'eſt-à-dire, à la circonférence du premier cercle de la Spirale, ce qui eſt vrai par la 18 du livre des Spirales.

De même pour le point C, qui eſt la fin de la ſeconde révolution, tirant CH perpendiculaire à AC, & égale à la circonférence dont AC eſt le rayon, puis tirant HI égale & parallele à AB, & joignant IC ce ſera la touchante : nous démontrerons qu'étant prolongée, elle coupera AGK, prolongée comme en K, & que les triangles IHC, CAK ſeront ſemblables : donc comme AC eſt à HI, ainſi AK ſera à CH, c'eſt-à-dire le double de CH à CH, & partant AK eſt le double de la circonférence dont AC eſt le rayon ; ce qui eſt vrai par la 19 des Spirales.

Pareillement pour avoir la touchante en un autre point de la premiére révolution, comme en L, je tire AL & je décris la circonférence LOPL coupant AB en O, je prends LM perpendiculaire à AL, & égale à ladite circonférence; par M je titre MN parallele à AL, & égale à AB rayon de la premiére révolution, NL eſt la touchante, car ſoit tirée APQ perpendiculaire à AL, par la même raiſon NL prolongée la rencontrera en un point, comme en Q, & comme AL ou AO eſt à MN ou AB, ainſi ſera AQ à LM, c'eſt-à-dire à toute la circonférence OPL : mais par la nature & par la deſcription de l'Hélice, comme AO eſt à AB, ainſi la portion OPL de ladite circonférence eſt à toute la circonférence, donc la ligne APQ eſt égale à la portion OPL de la circonférence OPL ; ce qui eſt auſſi démontré dans la 20 propoſition des Spirales d'Archiméde.

Semblablement pour avoir la touchante en un autre point de la ſeconde révolution, comme en R, je tire AR

& je décris la circonférence RVXR coupant ABC en V; je prends RS perpendiculaire à AR & égale à cette circonference, & je tire ST parallele à AR, & égale à AB; TR est la touchante: car par la même raison ayant tiré AQΩ perpendiculaire à RA, la ligne TR prolongée la rencontrera comme en Ω, & comme AR ou AV sera à TS ou AB, ainsi AΩ sera à SR, c'est-à-dire à la circonference RVXR : mais par la nature de la Spirale, comme AV est à AB, ainsi la circonference RVXR étant jointe à la circonference VXR, est à la même circonference RVXR; & partant AΩ est à la circonference RVXR, comme la même circonference RVXR jointe à la circonference VXR est à RVXR, donc la ligne AΩ est égale à l'aggregé des deux circonferences RVXR & VXR, ce qui est vrai par la 20 du livre des Spirales d'Archiméde.

L'on pouvoit dire d'abord tirez AR, & AXΩ qui lui soit perpendiculaire & égale à l'aggregé de la circonference RVXR & de VXR, on aura la touchante ΩR; ou bien ayant tiré AR & ayant décrit la circonference du centre A & de l'intervale AR, & semblablement RY perpendiculaire à AR, faites que comme AB est à AR, ainsi cette circonference du cercle soit à RY perpendiculaire, vous aurez le point Y; tirez YZ égale & parallele à AR, vous aurez le point Z, & ZR sera la touchante.

Mais il a semblé plus claire & plus facile de réduire ces mouvemens à la droite AB & à la circonférence, dont AR est le demi-diametre, & ainsi des autres.

Nous avons supposé qu'on nous donne des lignes droites égales à des circonferences de cercle, ou pour le moins qu'on en entende d'égales, ce qui étant posé nous avons par cette méthode les touchantes de ces lignes, ou pour mieux dire nous démontrons, que concevant une

une ligne droite égale à une circonference de cercle, l'on peut par la connoissance des mouvemens composez concevoir quelle sera la ligne droite qui touchera l'Hélice en un point proposé : nous ferons la même supposition pour la quadratrice.

Exemple neuviéme de la Quadratrice.

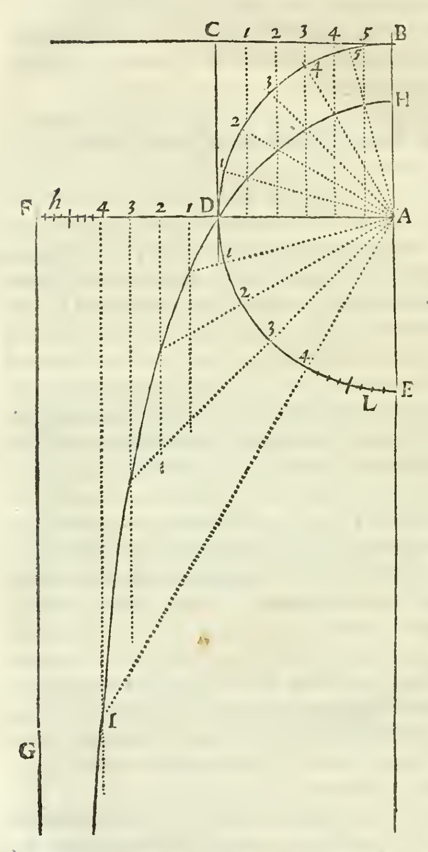
Soit proposé le quarré ABCD avec son quart de cercle ABD qui lui est inscrit, duquel le centre est A, & le rayon est AB, l'un & l'autre plus grand ou plus petit, suivant que l'on veut décrire la Quadratrice grande ou petite. Soit divisé l'un des côtez du quarré CB ou AD (perpendiculaire à AB rayon du quart) en autant de parties égales qu'on voudra 1 2 3 4 5, &c. & par ces points soit tiré des paralleles à AB jusques au côté opposé; divisez le quart de cercle en autant de parties égales 1 2 3 4 5, &c. à condition que si aux divisions de la ligne BC, vous avez commencé à compter 1, proche de B, vous commencerez aussi à compter au quart de cercle 1, proche de B; mais si vous aviez commencé en C, vous commencerez en D sur le quart de cercle; tirez du centre A des demi-diamétres jusqu'aux points de ces divisions du quart de cercle A 1, A 2, A 3, &c. là où A 1 coupera la premiere des paralleles, A 2 la seconde, A 3 la troisiéme, A 4 la quatriéme &c. vous aurez les points par où doit passer la portion DH de la Quadratrice de laquelle le sommet H est dans la ligne AB. *Voy. la Fig. suiv.*

Cette proposition est trop longue & embroüillée.

Nota que *Viete Respons. lib.* 8. *cap.* 8. appelle le point H *finis Quadratariæ*; mais il n'en considere que la portion HD pour la quadrature du cercle.

Pour prolonger cette ligne au-dessous du diamétre AD, ayant achevé le demi-cercle BDE du centre A, dans la droite AD prolongée vers D, je prends DF égale

à AD, laquelle je divise en autant de parties égales que je juge à propos 1 2 3 4, &c. à commencer proche de D, & par ces points je tire des paralleles au diamétre du cercle BAE, lesquelles je prolonge au-dessous de DF, autant qu'il est necessaire; puis je divise le quart de cercle DE, en autant de parties égales que j'ai divisé la ligne DF, à commencer aussi en D; par ces points & par le centre A je tire des lignes A 1, A 2, A 3, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent chacune sa parallele réciproque, c'est-à-dire A 1 la premiere, A 2, la seconde, &c.



& par ces divisions je décris la portion DI de la même Quadratrice prolongée.

Or il est manifeste que cette portion peut être prolongée à l'infini, car ayant pris une très-petite portion Fh de la ligne FD, & une partie proportionelle EL du quart du cercle, l'une & l'autre étant divisées par la moitié, & ayant tiré les lignes, comme nous avons dit, nous trouverons un point de la quadratrice : mais derechef l'on pourra diviser la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ &c. partie plus proche de F de la ligne Fh, & la moitié, puis le $\frac{1}{4}$, puis la $\frac{1}{8}$ partie plus proche de E de la circonference LE, & tirer de nouveau des lignes paralleles, & des demi-diamétres prolongez qui se coupent, pour avoir de nouveaux points de la quadratrice ; & puisque l'on peut continuer ces divisions sans fin, l'on trouvera aussi sans fin des points de la quadratrice au-dessous de D & de I ; car pour la finir, il faudroit que la derniere ligne tirée du point F de la ligne ADF parallele à AE rencontrât son demi-diamétre réciproque, c'est à sçavoir le dernier du quart de cercle DE, c'est-à-dire que FG perpendiculaire à DF en F rencontrât le diamétre BAE prolongé, auquel elle est parallele ; ce qui est impossible.

Et par là, vous voyez qu'aucun point de la quadratrice ne se rencontrera dans FG, puisque le demi-diamétre réciproque à FG ne la sçauroit jamais rencontrer : elle ne la coupera donc pas quoiqu'elle soit prolongée à l'infini, & néanmoins elle s'en approche toûjours de plus en plus, car les points de la quadratrice sont trouvez dans les paralleles à FG que l'on tire par des points toûjours plus proches de F que leurs précédentes, & partant la ligne FG est Asymptote de la quadratrice.

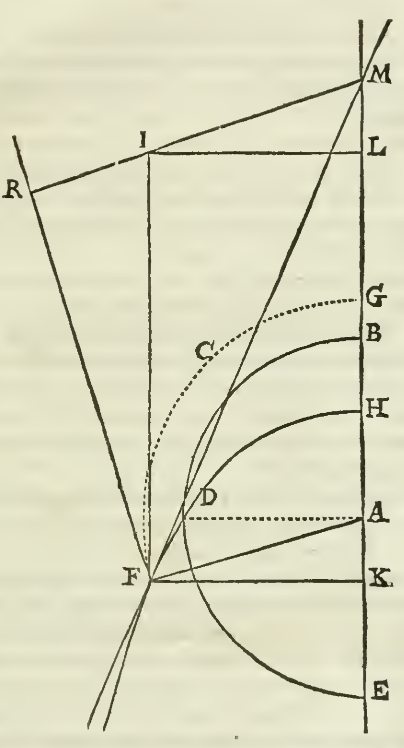
L'on peut achever le cercle entier, & continuer la quadratrice de l'autre côté du diamêtre BE, avec son Asymptote &c.

Je ne dis rien ni du nom de la Quadratrice, ni de son usage pour la quadrature du cercle au defaut de Dinostrate ou Nicomede, qui ne se trouvent point. *Voyez Pappus lib. 4. Collect. M.* ou *Viete lib. 8. resp. cap. 8. & Clavius Geom. pract. lib. 7. in appendice.*

Pour tirer par cette methode les touchantes à la Quadratrice, il faut examiner les mouvemens qui la décrivent. On voit d'abord que le demi-diamétre AD du cercle BDE étant prolongé & tournant circulairement sur le centre A, & la ligne CD se mouvant en même temps parallelement à soi-même, soit qu'elle s'approche de BA, ou qu'elle s'en éloigne suivant que nous faisons tourner le demi-diamétre, ou de D vers B, ou du même D vers E, car tout revient au même, que le point, dis-je, qui décrit la Quadratrice a pour le moins deux mouvemens, l'un droit que la ligne CD lui communique, l'autre circulaire à cause du mouvement du demi-diamétre AD; mais outre ces mouvemens il a encore celui qui l'oblige à se rencontrer dans la commune section des deux lignes AD, CD, ce que nous avons expliqué à la fin de la quatriéme proposition de ce Traité où vous trouverez une figure très-semblable à celle-ci. En voici pourtant l'application le plus intelligiblement qu'il m'est possible.

Soit proposé la quadratrice HDF, de laquelle le demi-cercle primitif, donnez-moi ce mot, soit BDE & le centre du demi-cercle soit A, & que l'on demande la touchante de la quadratrice en un point, comme en F. Je prolonge le diamétre EHAE de part & d'autre, puis je tire la ligne AF, qui est celle qui communique le mouvement circulaire au point F; je tire encore par F une parallele au diamétre BE, c'est celle qui communique à nôtre point le mouvement droit duquel la direction est FK parallele à DA & perpendiculaire à AE. Par

F je tire FR perpendiculaire à AF pour la direction du mouvement circulaire. Et ayant ſuppoſé que la ligne AF tourne circulairement de D vers B ou de F vers G, du centre A je décris la portion de la circonference FCG comprise entre les lignes AF & ABG. Ceci poſé je ſuis obligé d'imaginer que la ligne tirée de F parallele à ABG ſe meut de F vers ladite ABG, & par la nature de cette ligne, puiſque cette parallele doit s'ajuſter & ne faire qu'une ligne avec AB lors que la ligne AF ayant tourné de F vers LG aura la même poſition. Si je conçois deux points, l'un F à l'extrêmité de ladite parallele FI, l'autre F au bout de la ligne AF, & que l'un & l'autre de ces points n'ait que le mouvement, le premier de la ligne



IF le long de FK, l'autre celui qui lui fait décrire la circonference FCG; ou pour mieux dire, puiſque la direction de ce mouvement circulaire eſt FR, je ſuis aſſûré que pendant que le premier point aura décrit FK, le ſecond étant porté par la ligne AF que nous imaginons ſe mouvoir parallelement à ſoi-même, & partir du point F (comme nous avons pû faire ci-devant comme en la Spirale &c.) puiſque la direction du mouvement circulaire eſt FR, que ce point, dis-je, aura décrit dans FR prolongé une ligne FR égale à la circonference FCG.

Mais dautant que ces deux mouvemens ne ſont pas les ſeuls qu'a le point qui décrit la quadratrice, je ne tire pas du point R une ligne parallele & égale à FK, pour avoir à ſon autre bout un point de la touchante, mais j'examine plûtôt tous les mouvemens du point F qui décrit la quadratrice en cette ſorte.

Je remarque donc premierement ce que je viens d'expliquer, que le point F doit décrire la ligne FR égale à la circonference FCG en autant de temps que la ligne FI ſe mouvant parallelement à ſoi-même & uniformement en emploira juſqu'à ce qu'elle ait la poſition de la ligne ABG.

Secondement. Faiſant donc mouvoir la ligne AF parallelement & uniformement (puiſque FR eſt la direction du mouvement circulaire du point F, comme nous avons dit) ſans conſiderer le mouvement de la ligne IF, & partant conſiderant ladite ligne immobile, il eſt certain que, ſi nous gardons la condition des mouvemens qui décrivent la quadratrice, qui eſt que le point F doit toûjours être en la commune ſection des lignes AF, FI, quand l'extrêmité immobile de la ligne AF ſera en R, le point mobile F ſe doit rencontrer là ou AF prolongée tant qu'il ſera neceſſaire, coupe la ligne FI; tirez donc par R la ligne RIM parallele à AF & coupant FI en I

& le diamétre EBM prolongé en M, vous voyez que le point mobile F se doit rencontrer en I.

Troisiémement. Mais outre ces mouvemens il faut encore considerer que la ligne FI emporte ce point de I vers L où il se devra trouver (ayant tiré IL parallele à FK, & coupant ABG prolongée en L) lorsque la ligne IF sera une même avec la ligne ABG, c'est à sçavoir lorsque son extrêmité immobile F aura décrit la ligne FK, & son point immobile I, la ligne IL. Il est donc certain que si aux mouvemens précedens l'on ajoûte celui du point mobile F ou I le long de IL, sans considerer que ce point mobile doit toûjours être dans la commune section des lignes AF, IF, le point mobile F se doit trouver en L.

Enfin il faut encore considerer que ce point F a toûjours dû être la commune section des lignes AF, FI, & qu'ayant fait mouvoir AF jusqu'à ce que son extrêmité immobile ait décrit FR, on lui a donné la position RI, à laquelle elle s'arrête, posé que IF ne doivent se mouvoir que sur FK, & que par cette condition le point étant porté de I vers L, doit décrire la ligne IM au lieu de IL & se rencontrer en M au lieu de L; & partant tous les mouvemens de ce point étant examinez, l'on trouve que pendant que AF s'est promenée le long de FR, & IF le long de FK, le point de leur commune section est arrivé en M; & partant si vous tirez la ligne MF, vous aurez la touchante de la quadratrice en F; ce qu'il falloit faire.

En deux mots, ayant tiré comme ci dessus la ligne FR égale à la circonference FCG & les lignes FI, RIM, puisque nous considérons un seul mouvement circulaire du point qui décrit la quadratrice, sçavoir celui qu'il a en F, nous le considerons par notre principe, ce que nous avons pratiqué aux lignes précedentes, même en

la Spirale le long de la touchante FR, ce point doit donc monter de F vers R, mais il doit encore être porté vers la ligne AB, à cause du mouvement de la ligne FI, & outre ces deux mouvemens il doit toûjours être la commune section des lignes AF, FI, en quelque lieu que nous tirions ces deux lignes, il sera donc dans leur commune section lorsque AF sera en RIM, & IF en ABM, & partant il sera en M. Voici en deux mots une régle générale quadrat.

Un point F de la quadratrice étant donné, & le demi-cercle BDE, par le moyen duquel elle est décrite. Si du centre A de ce demi-cercle & de l'intervale AF, vous décrivez une circonference FCG depuis F jusques en un point G du diamétre AB, dans lequel se rencontre le sommet H de la quadratrice vers la partie de ce sommet; & si à cette portion de circonference vous tirez une touchante en F, dans laquelle vous prenez une ligne FR égale à ladite portion de circonference (d'où il suit que pour tirer la touchante en D, il ne faut que prendre dans AB prolongée depuis A une ligne égale au quart de cercle BD) la commune section du diamétre AB prolongée vers B, & d'une ligne RM tirée par R parallele à AF, sera dans la touchante de la quadratrice.

Ou sa converse à la façon d'Archiméde au livre des Hélices.

Si quadratricem linea recta contigat producaturque donec occurrat semi-diametro circuli quadratricis, in qua reperitur quadratricis vertex, etiamsi fuerit opus ad partes verticis productâ, & ab ejusmodi puncto sectionis recta linea ducatur parallela ei quæ à centro circuli quadratricis ad punctum contactûs in quadratrice ducitur; à puncto verò contactûs in quadratrice circumferentiæ circuli circulo quadratricis homocentri portio describatur ad partes verticis

tis quadratricis donec eidem ſemidiametro etiam productæ occurrat, eique circunferentiæ portioni tangens ducatur ad punctum quod eſt communis ſectio ipſius & quadratricis, occurret ejuſmodi tangens circuli ei quæ à communi ſectione tangentis quadratricis & diametri productæ ducta fuerat parallela, eritque lineæ circulum tangentis portio inter punctum (quod eſt communis ſectio ipſius & productæ parallelæ) & quadratricem intercepta æqualis prædictæ portioni circonferentiæ circuli.

Nota, l'on peut rendre la régle plus générale, faiſant comme la circonférence FCG eſt à FK; ainſi une ligne priſe dans FR, même prolongée, plus grande ou plus petite que FR, ſoit à une ligne plus grande ou plus petite que FK priſe dans FK, même prolongée; mais ne la prenant pas égale, la conſtruction en eſt plus difficile.

Remarquez deux ou trois choſes avant de paſſer outre. La premiére, pour plus grande intelligence l'on peut déduire l'application de la ſeconde partie de la quatriéme propoſition de ce traité en cette façon.

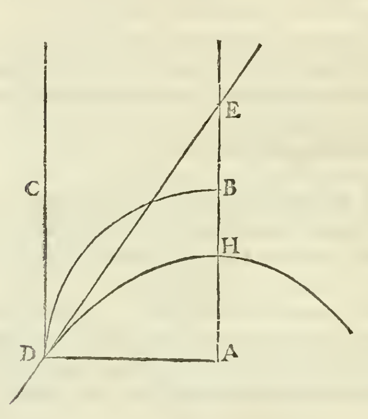
La vîteſſe du mouvement de la ligne IF, & partant de ſon extrêmité mobile F étant donnée dans FK, elle ſera auſſi donnée dans FA; & parce que le point mobile F doit être la commune ſection des deux IF, FA, la ligne IF ayant la poſition KAB coupera FA, c'eſt-à-dire en A; ce point a donc eû deux mouvemens, l'un de la gauche vers la droite égal à FK, l'autre en montant égal à KA, & ces deux ſe réduiſent à un ſeul FA: pareillement la vîteſſe de la ligne AF étant donnée dans FR, ſont point mobile F devant être la commune ſection de AF & FI ſe trouvera en I, & partant il a eû les deux mouvemens FR, RI, qui ſe réduiſent à un ſeul FI, qui eſt le troiſiéme côté du triangle FRI.

Ces quatre mouvemns (car nous avons diviſé en deux

parties celui qui fait que le point mobile F doit être la commune section des deux lignes AF, IF) étant réduits aux deux IF, FA achevez-en le parallelogramme IFAM, la diagonale FM sera la direction du mouvement mêlé de ces deux.

Ceci avoit déja été expliqué plus briévement, mais il y a plaisir de considérer une chose par divers biais & en différentes façons.

La seconde; si l'on demandoit la touchante de la quadratrice au point D, où la ligne AD est d'abord perpendiculaire à DC, que puisque le mouvement de AD est donnée dans DC, ou bien AB, & celui de DC est donné aussi d'abord dans DA, & la raison de ces deux mouvemens est comme de la ligne DA au quart de cercle DB, il ne faut que prendre dans AB prolongée autant qu'il le faut une ligne AE, à commencer en A, égale au quart de cercle, & du point E l'on tirera la touchante ED.



L'on eût pû faire trois divers cas pour les touchantes de cette ligne, mais le discours est tout le même voulant tirer la touchante au-dessus de D entre D & H, que lorsqu'on la tire en un point plus éloigné de H & au-dessous de D, comme au premier exemple.

La troisiéme, que *Viete loc. cit.* appelle le point H *finis quadratariæ*, & le point D *principium*; mais il ne considére que la portion DH, qui lui sert pour la quadrature du cercle, & puis il s'arrête à la façon de décrire la quadratrice, & il est manifeste que le point D se trouve d'abord, & que décrivant la quadratrice DH à l'ordinaire, le point H se trouve après les autres qui sont entre D & H : mais nous pouvons concevoir le point H tout le premier; & parce que considérant la Quadratrice prolongée des deux côtez, chacun des autres points en a un réciproque de l'autre côté également éloigné de H, & que le point H est le seul qui n'a point de réciproque, nous l'avons appellé le sommet de la Quadratrice.

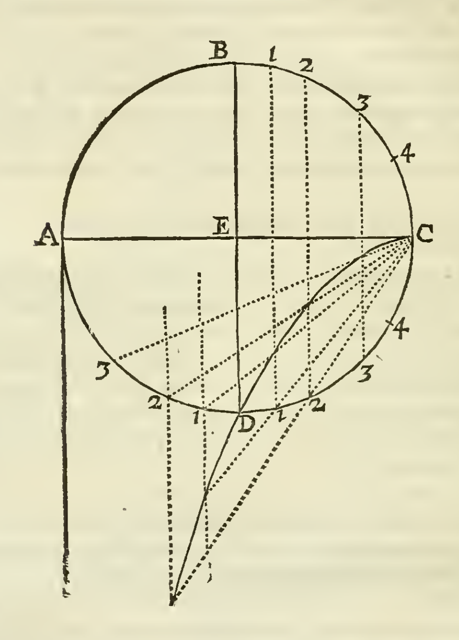
Dixiéme exemple de la Cissoïde.

SOIT proposé le cercle ABCD, plus grand ou plus petit, suivant qu'on veut décrire la Cissoïde, avec ses deux diamétres à angles droits AC, BD: du point D prenez de part & d'autre des points également distans D 1 & D 1 sur les quarts de cercle DA, DC, puis D 2, D 2, puis D 3, D 3 &c. tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DC des lignes paralleles au diamétre BD, puis du point C joignant les lignes C 1, C 2, C 3, C 4 &c. aux points 1 2 3 4 &c. du quart de cercle DA, là où C 1 coupera la parallele 11, & C 2 la parallele 22, & C 3 la parallele 33, & C 4 la parallele 44, vous aurez des points par lesquels la Cissoïde est décrite.

Que si vous voulez prolonger la Cissoïde CD en dehors du cercle, tirez par les points 1 2 3 4 &c. du quart du cercle DA des lignes paralleles au diamétre BD, & prolongez-les tant qu'il faudra en dehors du cercle du côté de D, puis par les points réciproques 1, 2, 3, 4 du quart de cercle DC, tirez du point C d'autres lignes oc-

cultes C 1, C 2, C 3, C 4, & prolonge-les autant qu'il le faudra hors le cercle, les points où chacune de ces lignes coupera ſa réciproque, ſçavoir C 1, la parallele 11; C 2 la parallele 22 &c. ces points ſeront dans la Ciſſoïde prolongée.

Par un diſcours ſemblable à celui dont nous nous ſom-



mes ſervis pour la quadratrice, l'on montrera que cette ligne peut être prolongée infiniment, & qu'elle ne rencontrera jamais une ligne droite infinie tirée du point A parallele au diamétre BD, ou ſi vous aimez

mieux la touchante du cercle de la Ciſſoïde au point A.

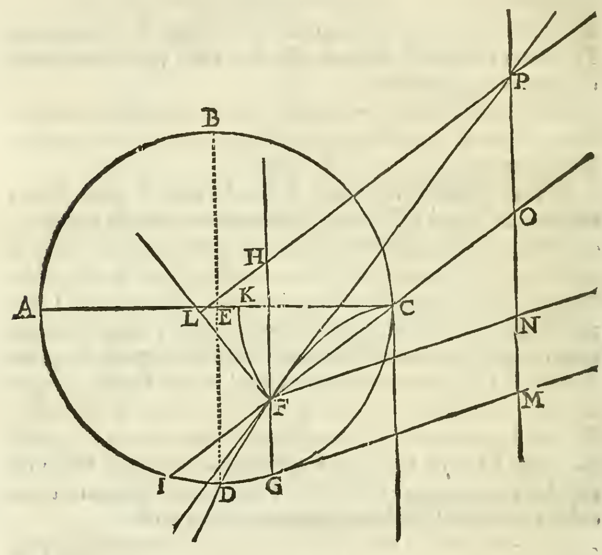
Et parce que la Ciſſoïde peut être continuée de l'autre côté par le moyen d'un autre cercle égal à ABCD, & décrit ſur ſon diamétre AC prolongé vers C, enſorte que ces deux cercles ſe touchent en C, il nous ſera permis d'appeller le point C, le ſommet de la Ciſſoïde, puiſque c'eſt l'unique dans la Ciſſoïde, qui n'en a point de réciproque, ou ſi vous voulez de ſemblable : car les points de la Ciſſoïde prolongée plus loin que D, à l'égard de C peuvent être appellez réciproques des points de la portion DC de la Ciſſoïde. Ce qui eſt aſſez clair par la méthode de trouver ces points.

Ceci poſé, il faut examiner les mouvemens particuliers du point qui décrit la Ciſſoïde, pour en donner les touchantes.

Il faut donc remarquer d'abord, que ſi vous faites tourner la ligne CD circulairement au tour du point C, enſorte qu'elle paſſe ſucceſſivement par C 1, C 2, C 3 &c. de D vers A, prenant les points 1 2 3 4 dans le quart de cercle DA, & qu'en même temps le diamétre BD ſoit porté parallelement à ſoi-même vers C, mais en montant de telle façon que ſon extrêmité D décrive le quart de cercle DC d'un mouvement égal & uniforme, & que lorſque la ligne CD aura la poſition CA, le diamétre BD ait la poſition de la touchante du cercle en C, c'eſt-à-dire de l'axe de la Ciſſoïde, le point qui aura toûjours été dans la commune ſection de ces deux lignes aura décrit la portion DC de la Ciſſoïde. Ceci poſé.

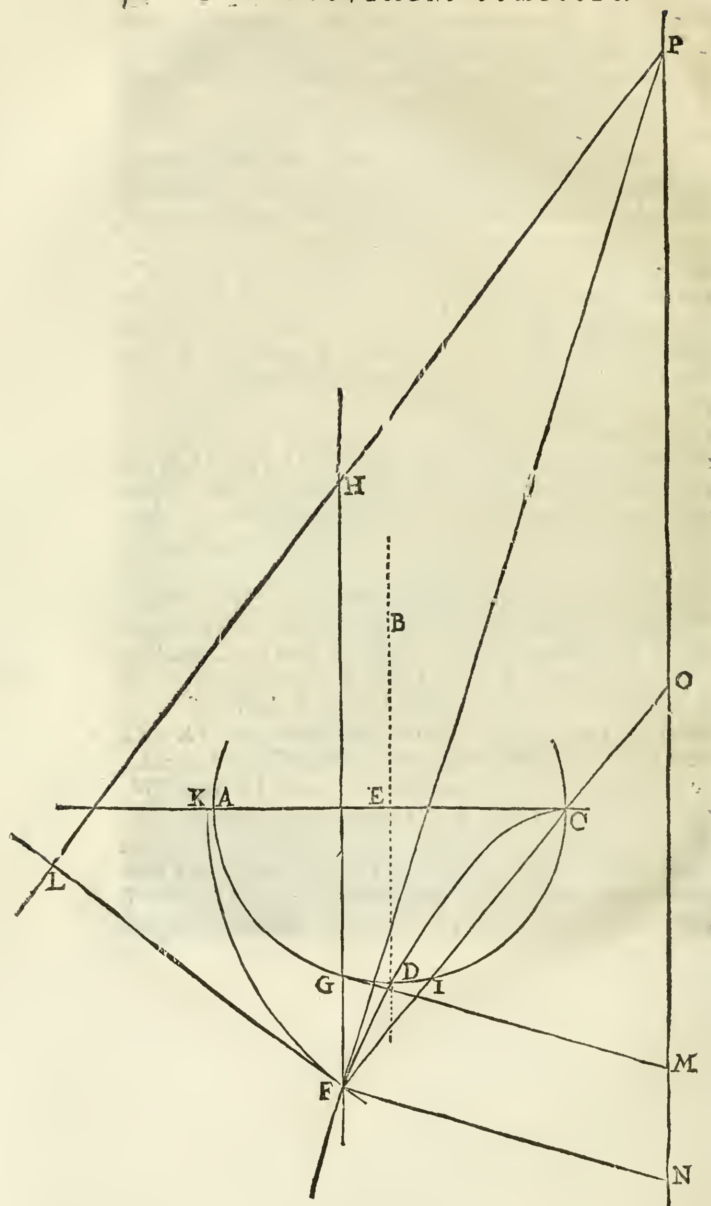
Soit propoſé le point F de la Ciſſoïde lequel ſoit pris dans cette figure entre les points C & D; mais dans la ſuivante il ſera plus éloigné du ſommet, & au-deſſous de D à l'égard de C, tirez la ligne FG parallele au diamétre BD, coupant le cercle en G en ſa partie inférieure dans le quart de cercle DC en cette premiére figure, & prolon-

gez-la du côté de F vers H, puis tirez la ligne CF, & prolongez-la jusqu'à la circonférence du cercle en I, (dans la seconde figure elle coupe le cercle avant que d'arriver en F) vous voyez donc que la ligne CFI en tournant autour du centre C jusqu'à ce qu'elle ait passé par toutes les positions des lignes tirées du point C à tous les points de la circonférence IA jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position CA, dans ce même temps la ligne



FG s'étant mûë, comme nous avons expliqué, parallelement à soi-même vers C, ensorte que son point G ait décrit la circonférence GC du cercle de la Cissoïde, sera arrivée en C, & aura la position de la touchante du cercle de la Cissoïde au point C.

Mais pendant le mouvement circulaire de la ligne CF vers A, si vous décrivez du centre C & de l'intervale CF un arc de cercle FK compris entre CF & CA & coupant CA en K, il se trouve que le point F de la ligne CF porté par le seul mouvement de la ligne CF, ce point, dis-je, a décrit l'arc FK, il a donc décrit l'arc FK en même temps que le point G porté par le mouvement que nous avons expliqué de la ligne FG, a décrit la circonférence GC, mais chaque point de la ligne FG décrit une ligne égale & semblable à celle que décrit le point G, & partant le point F de la ligne FG porté par cette ligne décrit une circonférence égale à GC : vous voyez donc que ne considérant que les deux mouvemens du point F, que les deux lignes CF, FG lui donnent sans considérer que ce point doit toûjours être en leur commune section par le mouvement de la ligne CF, il aura décrit la circonférence FK en même temps que la ligne FG lui aura fait décrire une circonférence égale & parallele à GC, & partant que ces deux mouvemens sont proportionnez, comme les circonférences FK & GC, mais les directions de ces deux mouvemens sont l'une FL touchante de l'arc FK, & perpendiculaire à CF; l'autre est FN parallele à GM, qui touche le cercle de la Cissoïde en G (car puis que la circonférence que le point F décrit est parallele à celle que décrit le point G, & puisque les points GF sont dans la même ligne droite, les touchantes sont paralles) & partant si vous faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, ou comme le demi-diamétre CF de l'arc FK, au diamétre entier CA, de l'arc GC, ainsi FL soit à FN, vous aurez les raisons de ces mouvemens dans leurs lignes de direction : ceci posé vous ne composez pas un mouvement de deux seuls FL, FN, car vous vous souvenez qu'outre ces deux mouvemens le point mobile F doit encore être toûjours la commune section des lignes



P
H
B
O
K
A
E
C
L
G
D
I
M
F
N

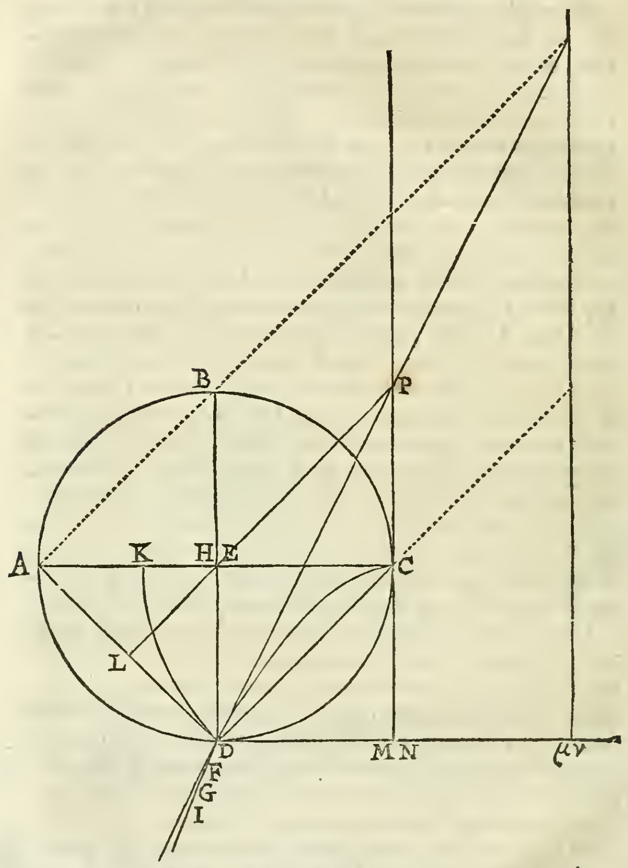
CF, FGH. Voici cette construction d'une autre façon.

Etant donné le cercle de la Cissoïde ABCD, son centre E, la Cissoïde CDF &c. comme nous avons expliqué, & qu'il faille en trouver la touchante en un point comme F. Par le point F tirez FGH ou GFH parallele au diamétre BD, coupant le demi-cercle ADC en G, & prolongez-la vers le côté du diamétre AC, comme en H; du sommet C de la Cissoïde tirez la ligne CFI en la premiére figure ou CIF en la seconde coupant le demi-cercle ADC en I; du centre C & de l'intervale CF décrivez l'arc de cercle FK vers le diamétre CA coupant le diamétre même prolongé vers A s'il en est besoin en K, tirez FL touchante de cette circonférence vers le diamétre AC, du point G tirez aussi GM touchante du cercle de la Cissoïde, & par le point F menez FN parallele à GM, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard du point A, faites que comme l'arc FK est à l'arc GC, c'est-à-dire comme la ligne CF est à CA, ainsi FL dans la premiére touchante, & prise si vous voulez *ad libitum*, soit à FN; par L tirez LHP parallele à FC, & prolongez-la vers le côté de C à l'égard de F, puis par N tirez NOP parallele au diamétre BD, & prolongez-la jusqu'à ce qu'elle rencontre LHP, comme en P, de ce point tirez la ligne PF, ce sera la touchante de la Cissoïde.

Dans cette construction nous ne faisons point mention des points H & O, ni du parallelogramme HFOP, quoi-qu'il eût été besoin d'en parler auparavant pour examiner tous les mouvemens du point F de la Cissoïde: l'on eût pû faire le même dans la quadratrice, où la seule interséction des lignes RIM & ABM, nous eût donné le point M, sans considérer le parallelogramme IFAM &c.

L'on pourroit ajoûter des démonstrations Géométriques à ces constructions, pour prouver tous ces points de rencontre mais cela seroit un peu long. *Voyez la figure de la Quadratrice.*

L'on peut encore considérer ces mouvemens de tous les



biais que nous les avons considérez dans la quadratrice ;

& énoncer ce Théoreme, que si d'un point P de la touchante FP, l'on tire PL parallele à CF coupant FL en L, & PN parallele à BD coupant FN en N, & dire que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à FN, ce qui est facile.

Il suffira avant de passer outre, de dire quelque chose de la touchante de la Cissoïde au point D, dont voici la figure sur laquelle je remarque :

Premiérement, que faisant trois cas pour les touchantes des cette ligne, l'un pour le point D, le second pour les points d'entre C & D, & le troisiéme pour les points au-dessous de D (car la touchante au point C est le diamétre AC; & généralement en toutes les lignes courbes qui ont un axe, leurs touchantes au sommet sont perpendiculaires à cet axe ;) l'on auroit pû mettre celui-ci le premier, n'eût été qu'il falloit expliquer plus généralement & sans confusion les mouvemens du point F : or en cette figure les points DFGI ne sont qu'un même, le point H peut être le même que le point E ou que le point B, comme en la seconde construction de cette figure, que nous avons marquée par des lignes ponctuées & avec des lettres Greques, & les points MN, ou μν sont un même point.

Secondement, sans supposer dans FL ou GM des lignes égales aux arcs FK & GC, l'on fait par une construction Géométrique, que comme l'arc FK est à l'arc GC, ainsi FL est à GM en cette façon.

Puisque l'angle ACD est à la circonférence de l'arc AD, & au centre de l'arc FK, il s'ensuit que l'arc AD ou DC est double en ressemblance à FK, & partant que comme le demi-diamétre EC est au demi-diamétre CD ou DA, ainsi l'arc DC est au donble de l'arc DK, & par conséquent que comme EC est à la moitié de DC ou de DA, ainsi l'arc CD est à l'arc FK : prenant donc DM égale à EC, & FL égale à la moitié de FA ou de DA,

l'on aura fait cette conſtruction Géometrique, & la parallele à CF paſſera de L par le centre E; ou encore prenez d'un côté la route DA, & de l'autre G μ double de DM, la parallele à CF ſera AB &c.

Onziéme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

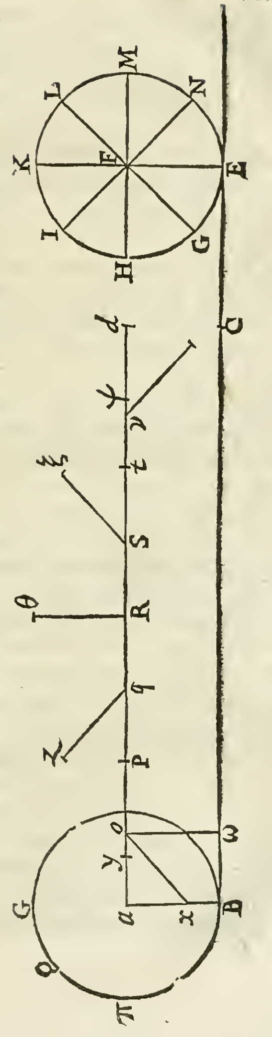
SOIT propoſé le cercle duquel le centre eſt *a*, le demi-diamétre *a* B, & ſa touchante BC au point B prolongee en C, l'on imagine que le cercle *a* B faiſant une révolution ſur la ligne BC, ſoit que BC ſoit égale à la circonférence du cercle, ſoit qu'elle ſoit plus grande ou plus petite (ce que je ſuppoſe indifférent, & facile à démontrer) le point B de ce cercle étant porté par les deux mouvemens, l'un droit qui le porte de B vers C, l'autre circulaire à cauſe de la révolution du cercle; que ce point, dis-je, décrit la Roulette ou Trochoïde; ou ſi vous voulez, ayant tiré par le centre *a* la ligne *a d* égale & parallele à BC vers le même côté, l'on imagine que le cercle gliſſant de B vers C ſans tourner à l'entour de ſon axe, enſorte que le centre *a* décrive la ligne *ad* par un mouvement uniforme, en même temps le point B décrive la circonférence de ſon cercle paſſant de B par π QGB d'un mouvement uniforme, & que le centre *a* étant arrivé en *d*, ce point ſe retrouve en C, où la ligne BC touche le cercle, & qu'enfin ces deux mouvemens, l'un circulaire, par le moyen duquel le point B parcourt une fois la circonférence de ſon cercle, l'autre droit, par lequel il eſt emporté vers C, mêlez comme nous avons dit, étant tous deux uniformes, font décrire la Roulette à ce point B.

D'où vous voyez que ces deux mouvemens étant uniformes, le point B peut décrire trois diverſes ſortes de

Roulettes, ſuivant que ſon mouvement circulaire ſera proportionné à ſon mouvement droit, ou ſi vous voulez ſuivant la raiſon de la circonférence de ſon cercle à la ligne *a d*, que le centre décrit, puiſque cette circonférence peut être ou égale à la ligne *a d*, ou plus grande ou plus petite.

Nous ne nous arrêtons pas à conſidérer les lignes qui peuvent être décrites, poſé que l'un ou l'autre de ces mouvemens, ou même poſé que ni l'un, ni l'autre ne fut uniforme.

Ceci poſé, pour décrire aiſément cette ligne, ſoit prolongée la ligne BC, comme en E; du point E ſoit tiré EF égale & parallele à *a* B; du centre F décrivez le cercle EGHIKLMN, qui ſera égal au premier, diviſez ſa circonférence en tant de parties que vous voudrez par les points GHIKLMN, & tirez par ces points les demi-diamétres du cercle. Diviſez la ligne *ad* en autant de parties égales que vous avez diviſé la circonférence GHI &c. aux points *o*P*q*R*Stu*, par le point *o* tirez *ox* égale



& parallele au rayon FG, par P tirez P*y* égale & parallele à FH, puis *q z* égale & parallele à FI, & ainsi des autres, vous aurez les points B*xyz* θ ξ ψ C, par lesquels la Roulette doit être décrite.

La raison de cette description est manifeste, car prenez dans la ligne *a d* un des points de sa division comme par exemple le premier *o*, & tirez *o* ω perpendiculaire sur BC, & par conséquent parallele aux rayons *a*B, FE, mais par la description *o x* est parallele à FG, & partant l'angle *x o* ω est égale à l'angle GFE, & décrivant du centre *o* & de l'intervale *o x*, l'arc *x* ω, cet arc est égal à l'arc GE: mais posé que le centre *a* ait décrit la ligne *a o*, & soit en *o*, le point B doit avoir décrit un arc égal à EG; car par l'hypothese EG est à sa circonférence totale, comme *a o* est à *a d*, & les mouvemens sont uniformes; donc le point B a décrit l'arc ω *x*, il est donc en *x*, & par conséquent le point *x* est un point de la Roulette; ce qu'il falloit démontrer. L'on démontrera la même chose de tous les autres points.

Il s'ensuit de cette démonstration, que décrivant le cercle GHIKLMN d'un autre centre pris dans la ligne *a d*, comme du centre *o*, P, R &c. & faisant le reste de la construction, l'on trouvera les mêmes points de la Roulette.

Ces connoissances suffisent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de son mouvement droit & de son mouvement circulaire; si l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui soient entre elles comme la ligne BC ou la base de la Roulette, est au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant prise dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux sera la touchante.

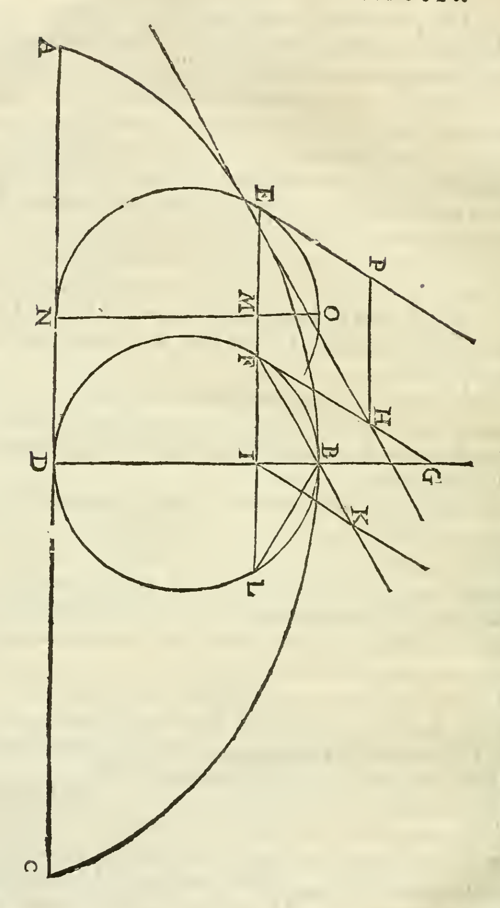
Car soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est ADC, le sommet B & l'axe BD, & que l'on en demandé la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, soit autour de l'axe BD, soit sur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne ADC ; du point E tirez la ligne EF parallele à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.

M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-dessus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallele à FB, la ligne EH sera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'est pas si générale n'étant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Il faut démontrer qu'ayant tiré comme ci-dessus la ligne EF & FG touchante du cercle au point F, & ayant pris FH dans FG égale à EF ; si l'on tire deux lignes l'une HE, l'autre FB, elles seront paralleles.

Pour le prouver, tirez IK parallele à FH jusqu'à ce qu'elle rencontre au point K la ligne FBK prolongée vers B ; prolongez encore la ligne EFIL jusqu'à l'autre côté du cercle en L, & tirez la ligne BL, & supposons que les lignes FB, EH sont paralleles ; donc l'angle



EHF

EHF eſt égale à l'angle FKI : mais par la conſtruction l'angle HEF eſt égal à l'angle EHF, parce que nous avons pris FH égale à EF ; il faut donc montrer que l'angle KFI eſt égal à l'angle FKI ; mais l'angle FKI eſt égal à GFK par la conſtruction, ayant tiré IK parallele à FG, il faut donc prouver que l'angle KFI eſt égal à l'angle GFK, mais GFK eſt égal à l'angle BLF, dans la ſection alterne ; il faut donc prouver que KFI eſt égal à BLF ; ce qui eſt certain.

En retournant, l'angle KFI eſt à BLF, mais BLF dans la ſection alterne eſt égal à l'angle GFK, donc KFI eſt égale à l'angle GFK : mais à cauſe des paralleles FG, IK, l'angle GFK eſt égal à FKI, donc KFI & FKI ſont égaux, & le triangle FIK eſt iſoſcele ; mais le triangle EFH eſt auſſi iſoſcele par la conſtruction le triangle EFH eſt donc ſemblable à FIK, & l'angle HEF eſt égal à l'angle KFI, d'où il s'enſuit que la ligne EH eſt parallele à FBK ; ce qu'il falloit démontrer.

Dans la figure précédente ayant fait décrire le cercle de la Roulette autour de ſon axe, & tiré la touchante FH, ç'a été toute la même choſe, comme ſi ayant fait tirer le cercle de la Roulette en la poſition qu'il doit être lorſque le point A du cercle eſt arrivé en E, nous lui euſſions tiré ſa touchante par le point E, car ces poſitions de cercles étant paralleles, & le point E étant auſſi élevé ſur la baſe AC, que le point F, les touchantes des cercles ſont paralleles, & partant l'une peut ſervir auſſi-bien que l'autre, pour en mêler un mouvement droit, puiſque l'une & l'autre rencontre la ligne EF, qui eſt la direction de ce mouvement droit. C'eſt pourquoi ſi l'on vouloit décrire le cercle de la Roulette en la poſition qu'il eſt lorſque le point qui la décrit eſt arrivé en E, ayant premiérement décrit le cercle BFD autour de l'axe BD, & tiré la ligne EFI parallele à ADC, prenez EM

dans EFI égale à FI, qui est comprise entre la circonférence & le diamétre du cercle qui est perpendiculaire à la base AC, vous aurez le point M par où doit passer ce diamétre perpendiculaire. Et partant si vous tirez MN perpendiculaire à AC, & si vous la prolongez vers M en O ensorte que NMO soit égale au diamétre du cercle de la Roulette, vous aurez le diamétre dudit cercle en la position requise; ce qui est facile.

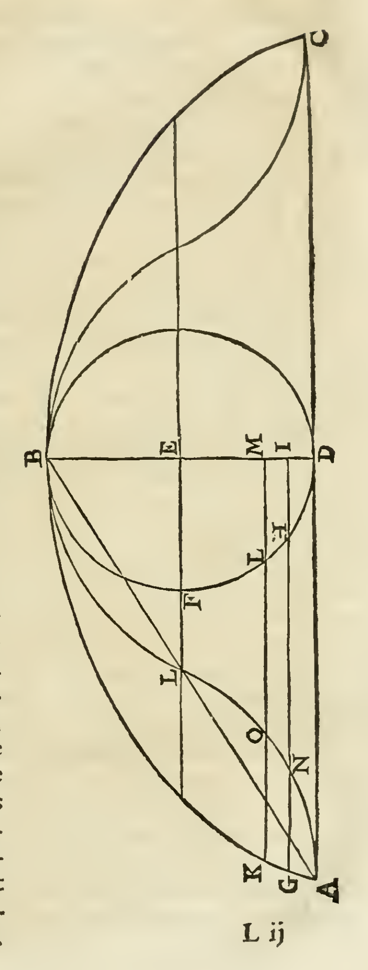
Je ne vous dirai rien des proprietez de la Roulette, comme que la ligne droite EF est à l'arc FB, en même raison que la base AC à toute la circonférence du cercle &c. M. de Roberval ne m'a pas encore fait voir le Traité qu'il en a fait, où après en avoir démontré cette propriété & un grand nombre d'autres, il compare ces lignes les unes aux autres, les semblables, celles de divers genres, les égales, les inégales, leurs ordonnées, leurs espaces &c. ce qu'il a expliqué dans un si bel ordre, qu'il m'a dit que son Traité étoit aussi limé comme s'il eût été sur le point de le faire imprimer.

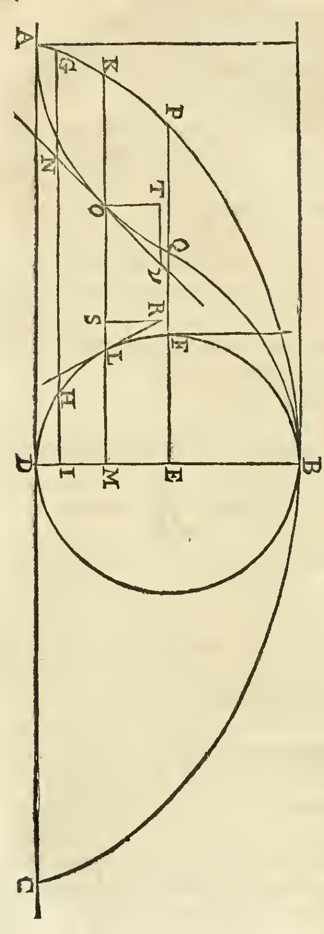
Douziéme exemple, de la compagne de la Roulette.

C'EST ainsi que l'a voulu nommer M. de Roberval qui l'a inventée, & qui en a imaginé l'hipothese & la description en cette sorte.

Soit proposé la Roulette ABC de laquelle la base est AC l'axe BD, le centre du cercle dans l'axe est E, & le cercle de la Roulette BFD à l'entour de l'axe. Entendez que la Roulette est décrite par la seconde façon qui en a été donnée dans l'exemple précédent; c'est à sçavoir que pendant que le cercle de la Roulette glisse depuis A jusques en C, ensorte que son centre E décrit d'un mouvement uniforme une ligne parellele & égale à AC, en même temps le point mobile A parcourt part un mouve-

ment uniforme la circonférence de ce cercle, & décrit la Roulette par le mouvement composé de ces deux ; imaginez maintenant que pendant que ce point parcourt ainsi la circonférence DFB, un autre point A ou D mobile dans le diamétre du cercle, qui est toûjours perpendiculaire à AC, monte le long de ce diamétre de D vers B d'un mouvement inégal, ensorte qu'il soit toûjours également élevé sur la base AC, comme est le point qui décrit la Roulette, c'est-à-dire qu'ayant tiré du point de la Roulette comme G, la ligne GHI coupant la circonférence du cercle en H & l'axe en I, lorsque le point mobile qui décrit la Roulette se rencontre en G dans la Roulette, c'est-à-dire en H, dans le cercle, le point qui décrit cette compagne se rencontre en I dans l'axe.





De même tirant par un autre point K la parallele à la baſe KLM, qui coupe la circonférence BLHD en L & le diamétre BD en M, lorſque le point de la Roulette eſt en K, c'eſt-à-dire dans le cercle en tel endroit qu'en L, le point de la compagne de la Roulette eſt dans BD en tel endroit que M, & ainſi des autres.

D'où il s'enſuit, que pour décrire cette ligne, ayant tiré des points de la Roulette des lignes paralleles à AC, ſi dans chacune de ces lignes, à commencer aux points de la Roulette, l'on prend une ligne égale à la portion de la même ligne compriſe entre la demi-circonférence du cercle & ſon axe, l'on aura les points par leſquels cette ligne eſt décrite. Ainſi tirant comme nous avons dit, la ligne GHI, ſi dans la même

ligne vous prenez GN égale à HI, vous aurez le point N, par lequel passe la compagne de la Trochoïde; de même prenant dans KLM la ligne KO égale à LM, vous aurez un autre point O de la même ligne. Et si par le centre E vous tirez EF perpendiculaire à BD, & si vous la prolongez en P jusqu'à la Roulette; ayant pris de P vers F la ligne PQ égale à EF dans la même ligne PF, vous aurez le point Q, qui est le milieu de cette ligne-ci, & auquel elle change de courbure, comme vous remarquerez mieux ci-après. Or ç'a été la même chose de décrire le cercle autour de l'axe de la Roulette, que de lui donner toutes les diverses positions qu'il a en glissant sur la ligne AC, ce qui a déja été remarqué dans la Roulette.

Ceci posé vous voyez que le point qui décrit cette ligne-ci est porté par un mouvement composé de deux droits, l'un uniforme, l'autre inégale, & desquels les directions sont perpendiculaires l'une à l'autre, se prenant dans les lignes AD, BD ou dans leurs paralleles.

Et parce que le point qui décrit cette ligne-ci monte de la même façon que celui qui décrit la Roulette monte dans le demi-cercle, tirant la touchante du point réciproque dans le demi-cercle, & composant le mouvement dont elle est la direction de deux mouvemens droits, l'un parallele à AD & l'autre à BD, l'on aura dans la ligne parallele à BD la quantité du mouvement qui fait monter ce point; & sçachant la raison de la base AC à la circonférence du cercle, puisque le point qui décrit la compagne de la Roulette est porté d'un mouvement uniforme & égal à AC, comme le point qui décrit la Roulette a un mouvement uniforme, & égal à ladite circonférence, si l'on fait que comme la circonférence du cercle est à AC, ainsi la touchante du cercle soit à une ligne droite, cette ligne sera la quantité du mouvement parallele à AC du point de cette ligne-ci qui

eſt réciproque à celui du cercle auquel l'on a tiré la touchante.

Par exemple, ſoit en la derniére figure ci-deſſus la Roulette ABC du premier genre, c'eſt-à-dire que ſa baſe AC ſoit égale à la circonférence de ſon cercle & le reſte, comme il a été dit : pour tirer la touchante de cette ligne au point O, je tire au cercle par le point L réciproque du point O, la touchante du cercle LR, & je compoſe le mouvement LR de deux RS, SL, dont l'un RS eſt parallele à BD; puis comparant les mouvemens du point O à ceux du point L, puiſque par la ſuppoſition le point O monte autant que le point L, je tire OT parallele & égale à RS, ce ſera la direction & la quantité de ce premier mouvement du point O; puis après parce que le point O a dans une ligne parallele à AC un mouvement égal à celui du point L le long de la circonférence de ſon cercle, c'eſt-à-dire un mouvement égal à celui du point L le long de la touchante LR, ayant tiré TV parallele à AC, & égale à LR, j'aurai les directions & la raiſon des deux mouvemens du point O, & partant la ligne OV ſera la touchante de cette ligne au point O; ce qu'il falloit faire.

Treiziéme exemple, de la Parabole de M. des Cartes.

MONSIEUR des Cartes nous apprend le moyen de décrire en deux façons cette ligne courbe, qui eſt une eſpéce de Parabole : la premiére par ſa regle compoſée qui eſt la 318 page de ſa Méthode, & la deuxiéme en la page 405 de la même Méthode, ou bien 337, qui eſt en faiſant mouvoir une Parabole ordinaire avec ſon plan le long de ſon diamétre MC, & prenant un point fixe comme G hors le même diamétre, mais dans un autre plan fixe ſur lequel le plan de la Parabole ſe

meuve en coulant, ces deux plans convenans toûjours l'un à l'autre pendant le mouvement de celui de la Parabole : puis dans le diamétre B C soit marqué un point B, qui ne se puisse mouvoir qu'au mouvement de la Parabole, demeurant toûjours à pareille distance du sommet ; & soit entendu une ligne droite G B indéfinie, qui tourne à l'entour du point fixe G comme centre, & qui passe toûjours par B pendant que la Parabole se meut, cette ligne GB coupant la Parabole mobile continuellement en de nouveaux points, la ligne courbe qui passera par tous ces points sera la Parabole de M. des Cartes, laquelle à proprement parler est une Conchoïde de Parabole, & peut-être double, car la ligne GB peut couper la Parabole proposée en deux points.

Pour avoir la tangente de ladite ligne courbe, par exemple en A, tirons premiérement deux lignes paralleles au diamétre de la Parabole TSV, que nous faisons mouvoir sur la ligne droite MC, desquelles paralleles l'une DGZ passe au point G, qui est comme le Pole, & l'autre parallele EAX passe au point A auquel nous voulons la touchante ; ensuite examinons premiérementle mouvement du mobile au point B, ledit mobile étant porté sur la ligne GBF, laquelle se meut circulairement sur le point fixe G en tirant vers les points DC, duquel mobile au point B nous avons la direction, à sçavoir BC, parce que par la description de la ligne courbe QRA, ledit mobile se maintient toûjours dans la ligne MC : nous avons aussi les deux autres directions desquelles est composée BC, l'une la circulaire DB, la ligne DB étant perpendiculaire sur GB, & l'autre direction la ligne droite BF, nous aurons donc ces directions, & les raisons des vîtesses dudit mobile au point B : or les points qui sont dans la Parabole mobile montant tous également, si nous

menons



menons du point C une parallele à BG, sçavoir CD, les lignes DG, EA & BC seront égales, & par conséquent EA & DG seront les mêmes directions que BC; ensuite examinons le mouvement du point A, auquel nous voulons avoir la touchante; & considérons le point B comme étant fixe & arrêté, autour duquel se meuve circulairement la même ligne BG vers VMT, car c'est le même mouvement circulaire que le précédent; donc l'une de ces directions, à sçavoir la circulaire, sera AN; & les angles DGB & GBM étant égaux, en même temps que le point B ira en D, aussi le point G ira en M, & A en N, les lignes GM & AN étant paralleles à BD; donc la direction circulaire du point A sera AN; mais le même point A se maintenant toûjours dans la Parabole TSV, sa direction sera la touchante de la même Parabole TSV. Soit donc menée cette touchante, à sçavoir IL, & achevé le parallelogramme AHIN, nous avons donc AI pour direction de ce point A se mouvant circulairement, & se maintenant aussi dans la Parabole STV, nous avons aussi la direction du même point A se maintenant dans MG, à sçavoir AE égale à BC, & par conséquent le parallelogramme EOIA étant achevé, la ligne droite OA diagonale du parallelogramme sera la direction du point A, & par conséquent la touchante de la ligne courbe QGRA audit point A; ce qu'il falloit faire.



PROJET
D'UN LIVRE DE MECANIQUE
traitant des Mouvemens composez.

PAR un mouvement composé j'entens celui qui se fait de deux ou plusieurs mouvemens differens entr'eux, soit par leurs directions ou leurs vîtesses, ou par toutes les deux, lorsque tous ces mouvemens sont communiquez à un même mobile, ou en même temps, ou successivement, soit que la communication s'en fasse en un instant, ou avec du temps.

On peut considérer le mouvement composé en trois états différens; sçavoir, ou dans ses causes, ou en soi-même pendant sa durée, ou dans ses effets.

Les causes d'un mouvement en tant que composé sont les mouvemens particuliers qui le composent, qui sont ou simples, ou composez eux-mêmes.

Ici on discourra des causes des mouvemens simples qui sont les principes actifs de la nature dans ses corps différens, soit qu'ils agissent par des causes ordinaires & réglées comme par la pesanteur, ou légereté, & par de pareilles qui nous paroissent uniformes ou à peu près, soit que ces causes, quoiqu'ordinaires, ne soient pas réglées, comme l'action du feu, celle des ressorts, celle des animaux &c. Ce qu'on amplifiera par les exemples des feux artificiels, par la poudre à canon, ou autrement par les arcs, les arquebuses à vent, & les autres actions de l'air. On y ajoûtera les mouvemens particuliers du soleil & des étoiles; on y fera entrer l'artifice des

hommes, qui par leurs propres forces, & par celles tant des animaux que des autres corps naturels, peuvent faire des mouvemens composez, d'autant plus diversifiez qu'ils ont de connoissance & d'industrie.

La nature en général possede les principes des mouvemens simples, dont il s'en compose une infinité d'autres dans les animaux, végétaux, minéraux &c.

Quoiqu'on connoisse les mouvemens simples qui en font un composé, il n'est pas toûjours facile de connoître ce composé, ni les lignes qu'il décrit par sa composition, particuliérement quand elles sont courbes, comme il arrive d'ordinaire. De là vient cette science spéculative qui tient beaucoup de la Géométrie, & qui traite des lignes & des figures décrites par les mouvemens composez; de leurs tangentes & de leurs autres propriétez.

Le mouvement composé consideré en soi n'est point différent d'un mouvement simple; & on le peut considérer comme simple, quand il est connu, de même que s'il étoit produit dans la nature par sa simplicité; même on peut considérer non-seulement un mouvement composé; mais aussi un mouvement simple droit ou courbe, comme étant composé de plusieurs autres, tant simples que composez; ce qui sert souvent pour la découverte de plusieurs belles véritez touchant la nature & les propriétez des lignes & des figures, qu'on ne découvriroit pas si facilement sans cette considération, quoique souvent elle ne soit qu'une fiction, mais pourtant une fiction d'une chose possible.

Il est remarquable que quand un mouvement composé se présenteroit à nous, si nous ne sçavons point qui sont ceux qui l'ont composé, quand même nous sçaurions qu'il n'est pas simple, nous ne sçaurions pourtant découvrir avec certitude qui sont les composans. La principale raison de ce défaut vient de ce que

tout mouvement peut être composé de plusieurs sortes, & même d'une infinité de sortes, entre lesquelles il seroit difficile, pour ne pas dire impossible, de rencontrer la véritable.

Touchant les effets du mouvement composé, ils ne sont remarquables qu'au même temps qu'il se compose; car après qu'il est composé, ses effets ne sont plus différens de ceux d'un mouvement simple.

En général ces effets sont de changer de vîtesse, ou de direction, ou de toutes les deux, sans compter que de deux ou de plusieurs mouvemens actuels il se peut composer un repos.

Mais en particulier, ou ils font des lignes différentes, ou des figures différentes, ou ils changent des temps égaux en des inégaux, ou au contraire, & partant quelquefois ils réglent, quelquefois ils déréglent; ils établissent, ils détruisent, & ainsi d'une infinité d'actions causées dans toute la nature par une telle composition.

Mais il ne sera pas hors de propos d'apporter ici pour exemple quelques-uns de ces effets particuliers, pour porter les esprits à la considération d'une infinité d'autres.

Les carosses courant vîte, & voulant tourner trop court, versent. Il en est de même de ceux qui sautent hors d'un carosse qui court.

De l'effet des lances, qui rompent, qui faussent, ou qui glissent sur les cuirasses.

Des balles de mousquet, de pistolet &c. sur des corps mobiles, tant sur ceux qui les repoussent que sur ceux qui les laissent entrer plus ou moins, ou qui écrasent la balle; du coup oblique qui est une espéce de mouvement composé, même sur un corps immobile. On citera les sillons des balles & des boulets sur la terre & sur l'eau, & on examinera si la réfraction ne feroit pas un pareil effet.

Les montres & les horloges ſe déréglent dans le tranſport, & les pendules y ſont des plus ſujettes.

Les pierres & quelques boulets de fer rougis au feu s'en vont en piéces au ſortir des canons.

Le choc de l'air, de l'eau & des corps terreſtres font des compoſitions de mouvemens ſuprenans & ſouvent dangereux, tant ſur la terre que ſur la mer.



DE RECOGNITIONE ÆQUATIONUM.

ÆQUATIONEM recognoſcere, eſt ſtatum illius examinare, eo fine ut innoteſcat ejus conſtitutio hinc ab origine ejuſdem, uſque ad ultimam ordinationem : atque un nota fiat laterum datorum, ad ea quæ quæruntur habitudo ; item ut dignoſci poſſit, an de unico larere ignoto explicabilis ſit ipſa æquatio, an vero de pluribus, & quot ; atque utrum aliqua ex ipſis ſint æqualia, an vero omnia inæqualia. Rurſus ſintne latera quæſita poſitiva, ſeu realia, ſeu etiam poſſibilia : an contra ficta, ſeu nulla, ſeu etiam impoſſibilia. Quæ omnia ut melius intelligi poſſint, præmittenda ſunt quædam, tum circa vocabulorum ac notatum, ſeu ſignorum explicationem, tum etiam circa ordinem, quem in ordinando hoc opere ſequi decrevimus.

Ac primum, quod ad vocabula, notas, ſeu ſigna ſpectat, ſive de lateribus ſit quæſtio, ſive de potentiis eorumdem laterum, quædam agnoſcimus quæ ſuâ naturâ aliquid inducant ſupra nihilum ; quædam verò quæ ſuâ naturâ aliquid indicant infra, dicantur omnia tum hæc, tum illa poſitiva ; priora quidem poſitiva ſupra, poſteriora autem poſitiva infra.

Rursùs tam poſitiva, ſupra quam poſitiva infra, vel affirmativa ſunt, vel negativa ; ſed affirmativa ſupra æquivalent negativis infra, & è contrario. Et quidem, ſignum affirmationis tam ſupra quàm infra, eſt hoc vulgò receptum $+$. Signum negationis tam ſupra quàm

infra, eſt hoc aliud vulgò quoque receptum ——. Signum differentiæ inter duas magnitudines, eſt ejuſmodi ═. Quo ambiguum relinquitur quænam ex duabus magnitudinibus propoſitis, inter quas tale ſignum intercedit, major eſt aut minor. Signum æqualitatis tale eſt ∞; quo ſignificatur magnitudines inter quas illud intercedit, eſſe æquales; ſive una magnitudo uni magnitudini æquetur; ſive una pluribus; ſive plures uni; ſive denique plures pluribus.

Operæpretium fuiſſet ſi quæ ſuâ naturâ habentur infra magnitudines, certo aliquo ſigno ab aliis diſtincto notatæ eſſent: verùm quia paſſim, immò ferè ſemper accidit ut in eadem quæſtione, ſub iiſdem terminis, magnitudines quæſitæ ſint, ſupra vel infra, ex natura ipſius quæſtionis, ac vi æquationis ad ipſam pertinentis; ideò talis diſtictio commodè fieri non potuit fiet tamen ut notâ ejuſmodi æquationis conſtirutione, innoteſcat etiam natura ipſorum laterum, & quicquid ad numerum eorumdem determinandum requiritur, ut magis patebit in ſequentibus.

Præterea omnis multiplicator nihilho æquivalens multiplicans quodvis multiplicatum (ſeu illud multiplicatum nihilo æquivalea, ſeu aliquid ſupra, aut infra indicet) producit nihilo æquivalens. Idem accidit, ſive multiplicator nihilo æquivaleat, ſive aliquid indicet ſupra aut infra, dummodo multiplicatum æquivaleat nihilo.

Idem prorſus intelligendum de diviſione, quod de multiplicatione; diviſor enim hic gerit vices multiplicatoris, quotiens multiplicati, & diviſum producti; quandoquidem multiplicatio reſtituit diviſionem, & diviſio mulplicationem. Hæc de notis ſeu ſignis, nunc de ordine dicamus.

Multis quidem modis ordinari poteſt æquatio, præ-

cipuè si multipliciter affecta sit; & revera à diversis authoribus diversimodè constitutus est ordo ipse, nobis accommodatissius ille videtur qui omniaquibus æquatio constat homogenea ex una parte constituit; sic ut omnia simul nihilo æquivalcant, quod quidem nullo negotio semper efficitur; illud autem vel unico exemplo p num fiet. Proponatur methodo Vietæ hæc æquatio $-BA^2 + C^2 A \propto Z^s$. manifestum est per anthite... oriri hanc æquationem $Z^s. - C^2 A + BA^2 - A^3 \propto O$, vel hanc $A^3 - BA^2 + C^2 A - Z^{sol}. \propto O$. Etsi vero utraque formula nostro instituto accomodari possit, priorem tamen eligimus, eam scilicet in qua magnitudo omninò data Z^{sol}. afficitur semper affirmatè, ac secundum eam intelligi debent quæcumque postea dicturi sumus.

De constitutione æquationum quadraticarum.

CAPUT UNICUM.

Propositio prima.

SI $Zp - RA + A^2 \propto O$.

Sunt duo latera, ambo supra, quorum summa est R; rectangulum vero sub ipsis est Z P & sit A alterutrum ex istis.

Intelligatur enim $A - B \propto O$ sic ut $+ A$ æquetur ipsi $+ B$ vel $A - C \propto O$ sic ut $+ A$ æquetur isti $+ C$: unde si ducatur $A - B$ in $A - C$ quod inde orietur æquabitur nihilo. Productum autem illud est $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix}$ $+ A^2$, proinde hoc æquatur nihilo, quod semper accidet. Sive enim A æquetur ipsi B ita ut $A - B \propto O$, quicquid valeat $A - C$, si $A - B$ ducatur in $A - C$, hoc

hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum; sive A æquetur ipsi C, ita ut $A - C \infty O$, quicquid valeat $A - B$, si $A - C$ ducatur in $A - B$, hoc est si nihilum per quodvis multiplicetur, producitur nihilum.

Jam BC vocetur ex hipothesi Zp; & $B + C$ vocetur R; fietque id quod proponitur nempe $Zp - RA + A^2 \infty O$ qua in æquatione A potest explicari tam de ipso B quam de ipso C à quibus producitur BC sive Zp.

Pro determinatione.

Determinatio alicujus æquationis est constitutio illa in qua vel omnia, vel quædam ex lateribus de quibus explicabilis est æquatio inter se æqualia sunt; unde cum de duobus tantum lateribus explicari potest æquatio, quales sunt quadraticæ unica tantum potest esse determinatio, cum scilicet duo latera sunt æqualia. Cum autem de tribus lateribus æquatio explicabilis est, quales sunt cubicæ; tunc duplex esse potest determinatio, altera quidem major, cum omnia tria latera æqualia sunt, altera vero minor, cum duo tantum æqualia sunt. Atque ita quo plura erunt latera in aliqua æquatione, id est quo potentia illius altior erit, eo plures erunt illius determinationes.

Jam in proposita æquatione unica esse potest determinatio in qua duo latera de quibus A est explicabile erunt æqualia; cum scilicet Zp æquatur $\frac{1}{4}R$: tunc enim unumquodque ex ipsis lateribus A æquale est $\frac{1}{2}$ ipsius R.

Nam in prædicta formula $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix} + A^2 \infty O$ in casu determinationis B intelligitur æquari ipsi C; unde illa æquatio æquivalet huic $B^2 - 2BA + A^2 \infty O$, sive etiam huic per interpretationem $Zp - RA + A^2 \infty O$

ut proponitur, ubi quoniam $R \propto 2B$ manifeſtum eſt Z P eſſe quadratum ipſius B, ſive dimidii ipſius R, ſive etiam Z P eſſe quartam partem quadrati ipſius R, & A quod æquatur ipſi B vel C, eſſe dimidium ipſius R.

Propoſitio ſecunda.

SI Z P $+ RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum, idemque majus eſt ſupra, alterum minus eſt infra, differentia amborum eſt R, & rectangulum ſub ipſis Z P & ſit A, alterutrum ex ipſis, (intelligatur enim $B - A \propto O$ ſic ut A dum erit ſupra, æquetur ipſi B; vel $C + A \propto O$ ſic ut A dum erit infra, æquetur ipſi C. Atque ex hypotheſi ſit B majus quàm C.) Si igitur $B - A$ ducatur in $C + A$, quod inde orietur æquabitur nihilo.

Productum autem id eſt $BC \begin{smallmatrix} +BA \\ -CA \end{smallmatrix} - A^2$ æquatur nihilo. Quo pacto æquatio explicabilis eſt de A ſupra, æquali ipſi B. Ubi tamen æquatio hanc interpretationem accipere debet ut $BC \propto$ Z P & $B - C \propto R$. Quod ſi quis ſingulas æquationis partes conferre velit, ut noſcat qua ratione ipſæ ſe invicem tollant, is reperiet $+ BC$ & $- CA$ ſeſe tollere, item $+ BA$ & $- A^2$ ſe tollere quoque. Unde ſit ut omnia homogenea ſimul nihilo æquivaleant.

Jam ſi C intelligatur æquari ipſi A, atque $+ C + A$ multiplicetur per $+ B - A$, productum erit rurſus $BC \begin{smallmatrix} +BA \\ -CA \end{smallmatrix} - A^2$, quæ æquatio eſt eadem quæ ſupra, unde, illa explicabilis quoque eſt de A dum ipſum æquatur ipſi C, ita tamen ut ipſum ſit infra ut indicat $C + A \propto O$, vide notas poſt æquationes cubicas. Hîc autem $+ BC + BA$ ſe invicem tollunt ſicuti $- CA -$

A^2; ut rurſus omnia nihilo æquentur; atque æquatio eandem quam ſupra accipere debet interpretationem.

Propoſitio tertia.

SI $Zp - RA - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera inæqualia, quorum alterum idemque minus eſt ſupra, alterum majus eſt infra, differentia amborum R, & rectangulum ſub lateribus ipſis Zp: A autem explicabile eſt de alterutro ex iiſdem.

Intelligatur enim ut ſupra $B - A \propto O$ item $C + A \propto O$ & B minus ſit quam C; fiet ergo productum $BC \begin{matrix} -BA \\ -CA \end{matrix} - A^2 \propto O$ quod quidem ſi hanc interpretationem accipiat ut $BC \propto Zp$, & $C - B$ ſit R, habebimus æquationem propoſitam: cætera ſe habent ut ſupra.

Nec ulla eſt in duabus prædictis propoſitionibus determinatio, quia in utraque duo latera, de quibus A explicabile eſt, ſunt ſemper inæqualia.

Item nulla alia eſt inter duas haſce æquationes differentia, niſi quod in priori latus quod eſt ſupra majus eſt eo quod eſt infra, in poſteriori autem illud quod eſt ſupra, minus eſt eo quod eſt infra.

Propoſitio quarta.

SI $Zp - A^2 \propto O$.

Sunt duo latera æqualia, quorum alterum eſt ſupra, alterum infra, rectangulum ſub ipſis eſt Zp & ſit A alterutrum ex iiſdem.

Intelligatur enim $B - A \propto O$ ſic ut $+A \propto +B$ ſupra. Item $C + A \propto O$, ſic ut A ex ſe æquetur ipſi C infra; ponaturque B æquari eidem C: itaque ſi fiat multiplicatio ut in antecedentibus, productum erit

$BC \begin{smallmatrix} + BA \\ - CA \end{smallmatrix} - A^2 \infty O$. Quod si hanc interpretationem accipiat ut $BC \infty Zp$, quia tollunt se invicem $\begin{smallmatrix} + B \\ - C \end{smallmatrix}$ habebimus æquationem propositam $Zp - A^2 \infty O$, quæ explicabilis est tam de A supra æquali ipsi B, quam de A infra æqualia ipsi C.

Propositio quinta.

Si $Zp + A^2 \infty O$.

Nullum propriè loquendo est latus, sed nnicum planum æquale ipsi Zp de quo quidem est explicabile ipsum A^2.

Ejusmodi autem æquatio irregularis est, nec potest ipsa oriri ex multiplicatione, ut factum est in antecendentibus.

Nota ergo æquationes quasdam de planis tantum explicabiles esse, quod etiam ad solida & ultra in infinitum extendi, quivis satis doctus reperiet.

De constitutione æquationum cubicarum.

CAPUT PRIMUM.

Si $Zs - SpA + RA^2 - A^3 \infty O$.

Sunt tria latera positiva supra, quorum summa est R, summa trium rectangulorum ex ipsis binis ac binis sumptis est Sp, solidum autem sub iisdem contentum est Zs, & sit A quodvis ex ipsis tribus.

Vide postea propositionem specialem.

Intelligamus enim $\begin{matrix} B - A \infty O \\ C - A \infty O \\ D - A \infty O. \end{matrix}$ & per quodvis ex istis

tribus binomiis, per illud ſcilicet quod nihilo æquari intelligitur, multiplicetur productum ex aliis duobus, quicquid illa duo valeant, & quicquid valeat eorumdem productum, fiet productum ex omnibus tribus æquale nihilo illud autem eſt.

$$\begin{array}{ll} & -BCA + BA^2 \\ BCD & -BDA + CA^2 - A^3 \propto O \\ & -CDA + DA^2 \end{array}$$

Omnia autem hanc interpretationem accipiunt ut $BCD \propto Z^s$.

$$\begin{array}{llll} \text{Item} & -BC \propto Sp & \& & +B \propto R \\ & -BD & & +C \\ & -CD & & +D \end{array}$$

Quo pacto habebimus æquationem propoſitam $Z^s - SpA + RA^2 - A^3 \propto O$.

Quia vero in multiplicatione binomiorum, ipſum A triplicem valorem induere potuit, puta vel ipſius B, vel C, vel D, ſic ut in eandem formulam ſemper incidamus, nec ullo modo mutetur æquatio, patet ipſam de eodem triplici A explicabilem eſſe, ſub ipſo triplici valore.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUJUS æquationis determinatio duplex eſt, altera major, in qua omnia tria latera ſunt æqualia; altera minor, in qua duo tantum æqualia ſunt.

Major determinatio ejuſmodi ſortitur conſtitutionem ut Z^s æquale ſit cubo tertiæ partis longitudinis R, ſive ut ipſum $Z^s \propto \frac{1}{27} R^3$, & Sp æquale ſit triplo quadrati ejuſdem tertiæ partis longitudinis R, ſive ut ipſum Sp

$\propto \frac{1}{3} R^2$, patet hoc ex eo quod ex constitutione præcedenti, si B, C, D, intelligantur tria latera æqualia, erit solidum BCD, sive $Z s$ æquale ipsi B^3.

Item plana $\begin{matrix} BC \\ BD \\ CD \end{matrix}$ simul, sive $Sp \propto 3B^2$; & tandem latera $\begin{matrix} B \\ C \\ D \end{matrix}$ simul, sive R æqualia 3 B.

Minor determinatio longiori eget apparatu, pro quo ponamus duo latera æqualia esse ea quæ in constitutione præcedenti referebantur per B & C, quo pacto sic æquatio explicari poterit, ut $B^2 D \propto Z s$;

Item $B^2 + 2 BD \propto Sp$ & $2 B + D \propto R$.

$$\text{Atque ita } B^2 D - B^2 A + 2 BA^2 - A^3 \propto 0$$
$$- 2BDA + DA^2.$$

Jam quia B est A & $2 B + D$ est R, ideo $R - 2 A$ est D. Hanc ergo speciem induat D in posterum, ut sit $R - 2 A$.

Item B^2 est A^2, quod ductum in D id est in $R - 2A$, producit $RA^2 - 2 A^3$ quæ species proinde æqualis est Zs, & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{2} Z s. - \frac{1}{2} RA^2 + A^3 \propto 0.$$

Rursus B^2 est A^2: & $2 BD$ est $2 RA - 4 A^2$ quæ ambas species simul constituunt, $2 RA - 3 A^2$ ambæ autem constituunt Sp. Itaque $2 RA - 3 A^2 \propto Sp$, & omnibus ordinatis

$$\frac{1}{3} Sp - \frac{2}{3} RA + A^2 \propto 0.$$

Hic nisi ambigua esset hæc æquatio plana, ac de duobus lateribus supra explicabilis, jam haberetur valor ipsius A; sed quia duplex est valor ille nempe, vel latus $(\frac{1}{9} R^2 - \frac{1}{3} Sp) + \frac{1}{3} R$, vel $\frac{1}{3} R$ — latere $(\frac{1}{9} R^2 - \frac{1}{3} Sp)$

eſtque ex illis, alter quidem utilis, alter inutilis, atque etiam ſi utilem agnoſcere non ſit difficile, tamen quia ex comparatione quarumdem aliarum æquationum ad ſimplicem lateralem, ac de unico eoque vero latere explicabilem devenire poſſumus, ideo ſic progrediemur.

Sed ſupra etiam $\frac{1}{2}$ Z ſ. — $\frac{1}{2}$ RA ^{2} + A ^{3} ∞ O.

Aſcendat per A depreſſior harum æqnationum nempe hæc

$$\tfrac{1}{3}\,Sp - \tfrac{2}{3}\,RA + A^{2} \infty O.$$

Atque ita fiet hæc $\frac{1}{3}$ S pA — $\frac{2}{3}$ RA ^{2} + A ^{3} ∞ O.

Huic ergo æqualis eſt $\frac{1}{2}$ Z ſ. — $\frac{1}{2}$ RA ^{2} + A ^{3} ∞ O.

Sublatoque communi A ^{3} & addito $\frac{1}{2}$ RA ^{2} puta per anthiteſim fiet hæc æquatio.

$$\tfrac{1}{2}\,Z\,ſ. \infty \tfrac{1}{3}\,Sp\,A - \tfrac{1}{6}\,RA^{2}.$$

Et communidiviſore $\frac{1}{6}$ R adhibito $\frac{3\,Z\,ſ.}{R} \infty \frac{2SpA}{R}$ — A^{2}.

Atque omnibus ordinatis $\frac{3\,Z\,ſ}{R} - \frac{2\,Sp}{R}\,A + A^{2} \infty O.$

Sed rurſus ut ſupra $\frac{1}{3}$ Sp — $\frac{2}{3}$ RA + A ^{2} ∞ O.

Ergo hæ duæ æquationes invicem æquales ſunt, unde ſublato communi A ^{2} & per anthiteſim fiet hæc æquatio $\frac{3\,Z\,ſ.}{R} = \frac{1}{3}\,Sp = \frac{2\,Sp}{R}\,A = \frac{2}{3}\,RA.$

Itaque $\dfrac{\frac{3\,Z\,ſ}{R} = \frac{1}{3}\,Sp}{\frac{2\,Sp}{R} = \frac{2}{3}\,R}$ eſt valor ipſius A

Si ergo accidat aliquam ex præmissis differentiis vel utramque esse æqualem nihilo, vel alteram esse nihilo minorem, alteram verò nihilo majorem, nulla erit ejusmodi determinatio: sed æquatio explicari poterit de tribus lateribus supra, at de uno tantum. Aliquo tamen casu fieri poterit, ut sub proposita initio æquationis formula unicum inveniatur latus supra, & unicum infra, quod proprie latus non est, sed planum tunc autem propositio specialis est cujus explicandæ hic est locus.

Propositio secunda specialis.

Si $Z^s - S^p A + RA^2 - A^3 \infty O$,
Sit autem $\frac{Z^s}{R} \infty S^p$.

Sunt duo latera, alterum suprà æquale ipsi R, alterum infrà non proprie latus, sed planum æquale ipsi S^p, & A explicari potest de quolibet ipsorum. Fingatur enim $B^p + A^2 \infty O$ quæ æquatio explicabilis est de unico plano infra æquali ipsi B^p ut notatum est prop. 5ª. Æquat. quadraticarum.

Item $C - A \infty O$ tum fiat multiplicatio ut consuevimus.

Orietur ergo $B^p C - B^p A + CA^2 - A^3 \infty O$.

Hæc æquatio eam accipiat interpretationem ut $B^p C \infty Z^s$. & $B^p \infty S^p$, atque $C \infty R$.

Quod pacto indecimus in æquationem propositam, ubi manifestum est ex generatione $\frac{Z^s}{R} \infty S^p$, & A esse æquale vel ipsi C, hoc est R supra, vel A^2 est æquale ipsi B^p, hoc est S^p infra.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM.

Propositio prima.

Si $Z^{f} - S^{p} A^{2} + A^{3} \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo ſunt ſupra, & tertium infra, idemque majus duobus reliquis ſimul ſumptis, differentia ſeu exceſſus tertii, ſupra ſummam duorum priorum eſt R: at S^{p} eſt differentia ſeu exceſſus ſummæ duorum rectangulorum, ejus ſcilicet quod ſub primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, ſupra id, quod ſub primo & ſecundo, ſolidum autem Z^{f} quod fit ſub tribus, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis.

Intelligantur enim $B - A$
$C - A$
$D + A$

Quorum D ſit majus ambobus B & C ſimul ſumptis; ſit autem quævis ex illis tribus ſpeciebus nihilo æqualis, & fiat multiplicatio ſolito modo orieturque,

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^{2} \\ BCD - CDA - BA^{2} + A^{3} \propto O. \\ \quad\;\; + BCA - CA^{2} \end{array}$$

& quia D majus ponitur quam B & C ſimul, manifeſtum eſt BC multo minus eſſe quam BD & CD ſimul ſumpta. Itaque omnia hanc interpretationem recipiant ut $+ D - B - C$ ſit $+ R$, item $- BD - CD + BC$ ſit $- S^{p}$ & BCD ſit Z^{f}. quo pacto incidemus in æquationem propoſitam.

$$Z^{f} - S^{p} A + RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Patet autem ex formula, A explicabile eſſe tam de B

aut C ſupra quàm de D infra, quia in multiplicatione binomiorum ipſum triplicem hunc valorem induere potuit.

Determinatio præcedentis æquationis.

DETERMINATIO unica eſt, nempe minor, cum ſcilicet duo latera ſupra ſunt æqualia; aliter enim æqualia eſſe non poſſunt: ſi quidem illud quod eſt infra, duobus reliquis ſimul majus eſt.

Poſito ergo quod B & C ſunt æqua, explicari poterit formula æquationis hoc modo.

$$B2D - 2BDA + DA^2$$
$$+ B2A - 2BA^2A^3 \infty O.$$

Quoniam autem B eſt A & D — 2 B eſt R, ergo D — 2 A eſt R & per anthiteſim R + 2 A eſt D, hanc ergo ſpeciem induat D in poſterum ut ſit R + 2 A.

Item B^2 eſt A^2, quod ductum in D, id eſt in R + 2 A producit $RA^2 + 2A^3$, quæ ſpecies proinde æqualis eſt Z^f & omnibus ordinatis

$$\tfrac{1}{2}Z^f - \tfrac{1}{2}RA^2 - A^3 \infty O.$$

Rurſus B^2 eſt A^2, & 2 BD eſt $2RA + 4A^2$. Quarum ambarum ſpecierum differentia eſt $2RA + 3A^2$, hæc idcirco æqualis eſt S^p & omnibus ordinatis.

$$\tfrac{1}{3}S^p - \tfrac{2}{3}RA - A^2 \infty O.$$

Aſcendat hæc æquatio par A gradum, atque ita rurſus

$$\tfrac{1}{3}S^pA - \tfrac{2}{3}RA^2 - A^3 \infty O.$$

Ergo huic æquationi æquatur hæc

$$\tfrac{1}{2}Z^f - \tfrac{1}{2}RA^2 - A^3 \infty O.$$

Additisque communibus A^3, & $\frac{1}{2} RA^2$ fiet hæc

$$\frac{1}{3} Sp\, A - \frac{1}{6} RA^2 \infty \frac{1}{2} Zs.$$

Et communi divisore adhibibito $\frac{1}{6}$ R, erit $\frac{2\, Sp\, A}{R} - A^2 \infty \frac{3\, Zs.}{R}$

Et omnibus ordinatis $\frac{3\, Zs}{R} - \frac{2\, Sp\, A}{R} + A^2 \infty O.$

Mutatisque omnibus signis $- \frac{3\, Zs.}{R} + \frac{2\, Sp\, A}{R} - A^2 \infty O.$

Sed rursus supra $\frac{1}{3} Sp - \frac{2}{3} RA - A^2 \infty O.$

Itaque addito communi A^2 & per anthitesim fiet hæc æquatio

$$\frac{3\, Zs}{R} + \frac{1}{3} Sp \infty \frac{2\, Sp\, A}{R} + \frac{2}{3} RA.$$

Itaque $\dfrac{\frac{3\, Zs}{R} + \frac{1}{3} Sp}{\frac{2\, Sp}{R} + \frac{2}{3} R.}$ est valor ipsius A.

Propositio secunda.

SI $Zs. - Sp\, A + A^3 \infty O.$

Sunt tria latera, quorum duo sunt supra, & tertium infrà, idemque æquale duobus prioribus simul sumptis.

Sp est excessus summæ duorum rectangulorum, ejus scilicet quod sub primo & tertio, & ejus quod

ſub ſecundo & tertio, ſupra id quod ſub primo & ſecundo.

Z ſ. autem eſt id quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus: ponantur enim eædem ſpecies quæ ſupra, niſi quod D intelligi debet æquale duobus B & C ſimul, fietque rurſus eadem æquatio.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Quoniam autem D, ponitur æquale duobus B & C ſimul, ideo evaneſcet affectio ſub A^2 quia $-BA^2 - CA^2$ tollunt DA^2, ſupereſt ergo tantum.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + \\ BCD - CDA + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA \end{array}$$

Ubi rectangula BD & CD ſimul majora ſunt quam BC.

Quæ æquatio ſi hanc interpretationem accipiat, ut BCD æquetur Z ſ. & $\begin{array}{l} -BD \\ -CD \\ +BC \end{array}$ æquetur $-$ S p,

Incidemus in æquationem propoſitam $Z^{ſ} - S_P A + A^3 \propto O$.

Ubi manifeſtum eſt ipſum A explicabile eſſe tam de B & C ſuprà, quàm de D infrà.

Determinatio rurſus unica eſt, nempe minor, cum duo latera ſuprà ſunt æqualia, neque enim aliter æqualia eſſe poſſunt, cum illud quod eſt infrà duobus reliquis ſimul ſumptis ſit æquale.

Invenietur ergo hæc derminatio ſic.

Poſitis B & C æqualibus, æquatio talis eſſe poterit, $B^2 D - 3B^2 A + A^3 \propto O$ unde $S_P \propto 3B^2$. *

* *Quoniam D æquatur B & C ſimul; ac B & C ſimul in D æquales ſunt 4 B^2, ex quibus ſublato BC quod eſt B^2 reſtat $3B^2$.*

Posito ergo, quod B sit A ex hypothesi determinationis, tunc $Sp \propto 3A^2$.

Itaque $\frac{1}{3} Sp$ est valor ipsius A^2 & $Zs \propto 2A^3$.

Propositio tertia.

Si $Zs - SpA - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo sunt suprà, & tertium infrà, idemque minus duobus prioribus simul sumptis, excessus summæ duorum priorum supra tertium est R, at rursus ut in duabus præcedentibus propositionibus summa duorum rectangulorum, ejus scilicet, quod sub primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio excedit id quod sub primo & secundo, & excessus est Sp; Zs. autem est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus.

Ponantur enim eædem species quæ suprà ea tamen lege ut D intelligatur minus quàm B & C simul, & rectangula BD & CD simul majora quàm BC, fietque rursus hæc æquatio ut suprà, nempe

$$\begin{matrix} & -BDA + DA^2 & \\ BCD & -CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ & + BCA - CA^2 & \end{matrix}$$

Quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut excessus B & C simul suprà D, sit R; at excessus rectangulorum BC & CD simul suprà BC, sit Sp; item solidum BCD sit Zs, incidemus in æquationem propositam

$$Zs - SpA - RA^2 + A^3 \propto O.$$

Ubi manifestum est A explicari posse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio præcedentis æquationis.

HUJUS propositionis determinatio triplex esse potest, prima major, cùm omnia tria latera sunt æqualia; secunda, cùm duo latera suprà tantùm sunt æqualia; & tertia, cùm alterum eorum laterum, quæ sunt suprà, æquale est ei quod est infrà. Utraque autem harum posteriorum minor est, quàm idcirco hic accidit esse duplicem.

Et quidem major determinatio facillima est.

Positis enim B, C, D æqualibus, factaque binomiorum multiplicatione, & sublatis quæ se invicem destruunt, manifestum est superesse

$BCD - BDA - BA^2 + A^3 \infty O.$

Sive quod idem est $B^3 - B^2 A - BA^2 + A^3 \infty O.$

Itaque Z^f est B^3 sive A^3.

S^p est B^2 sive A^2 & R, est B sive A.

Prior autem duarum minorum determinationum, cùm scilicet duo latera suprà sunt æqualia, instituitur modo præmisso, tam in prima propositione primi capitis æquationum cubicarum, quàm in prima secundi capitis: positis enim lateribus B & C æqualibus, & argumentando ut suprà in prædictis propositionibus, præcipuè vero ut in prima secundi capitis, nisi quod hic D invenietur esse $2A - R$, reperiemus tandem valorem ipsius A esse

$$\frac{\frac{3Z^f}{R} - \frac{1}{3}S^p}{\frac{2S^p}{R} + \frac{2}{3}R}$$

Tandem altera duarum minorum determinationum, cùm scilicet alterum laterum suprà æquale est ei quod est

infra, facilis eſt: poſito enim quod B ſit æquale ipſi D in formula præmiſſa, ac ſublatis iis quæ ſe invicem tollunt, remanebit hæc æquatio, $B^2C - B^2A - CA^2 + A^3 \propto O$.

Itaque in æquatione propoſita $Z^s \propto B^2C$, $Sp \propto B^2$ & $R \propto C$:

At C eſt unum ex duobus lateribus ſuprà, itaque ipſum R eſt unum ex lateribus ſuprà.

Item eadem ratione B^2 ſive Sp eſt quadratum alterius lateris ſuprà, idemque quadratum ejus quod eſt infrà: ergo A explicabile eſt, tam de R ſuprà, quàm de S ſuprà & infrà.

Propoſitio quarta.

SI $Z^s - RA^2 + A^3 \propto O$.

Sunt tria latera quorum duo ſunt ſuprà, & tertium infrà idemque minus quovis duorum priorum, exceſſus ſummæ duorum priorum ſupra tertium, eſt R. At ſumma duorum rectangulorum ejus ſcilicet quod ſub primo & tertio, & ejus quod ſub ſecundo & tertio, æqualis eſt ei quod ſub primo & ſecundo. Z^s. autem eſt id quod ſub tribus continetur & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis tribus.

Reſumatur enim formula hujus capitis.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \propto O \\ \quad\;\; + BCA - CA^2 \end{array}$$

Intelligaturque D minus eſſe quàm B & C ſimul, & ſingula: at rectangulum BC æquale ſit ambobus ſimul BD & CD, itaque tollunt ſe invicem ipſa rectangula, & ſic evaneſcit affectio ſub latere A, quia B & C ſimul ſuperant D; differentia eſto R, & ſolidum BCD vocetur 2 ſo-

lidum, quo pacto incidemus in æquationem propoſitam, nempe

$$Z^{s} - RA^{2} + A^{3} \propto O.$$

Ubi palam eſt A explicari poſſe, tam de B & C ſuprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUJUS propoſitionis unica eſt determinatio, eaque minor, cùm ſcilicet duo latera ſuprà ſunt æqualia: neque enim aliter æqualia eſſe poſſunt, quia unumquodque eorum quæ ſunt ſuprà, majus eſt eo quod eſt infrà.

Ponantur ergo æqualia B & C, unde in formula præmiſſa, ſublatis quæ ſe invicem tollunt, talis erit æquatio.

$$\begin{aligned} &B^{2}D + DA^{2} \\ &\quad - 2BA^{2} + A^{3} \propto O. \end{aligned}$$

Jam quia B eſt A & 2 B — D eſt R, ideò 2 A — R eſt D. Item quia BD & CD ſimul æqualia ſunt BC, ideò ſi loco tam B quàm C ſumatur A, & loco ipſius D ſumatur 2 A — R fiet hæc æquatio.

$$4A^{2} - 2RA \propto A^{2} \text{ hoc eſt } 3A^{2} - 2RA \propto O.$$

Et communi diviſore 3 A fiet $A - \frac{2}{3}R \propto O$.
Quapropter $\frac{2}{3}R$ eſt valor ipſius A.

Propoſitio quinta.

SI $Z^{s} + S^{p}A - RA^{2} + A^{3} \propto O$.

Sunt tria latera, quorum duo ſunt ſuprà, & tertium infrà, idemque minus quovis duorum priorum, ita ut exceſſus ſummæ duorum priorum, ſuprà tertium ſit R; at ſumma duorum rectangulorum, ejus ſcilicet quod ſub primo

primo & tertio, & ejus quod sub secundo & tertio, minor est eo rectangulo, quod fit ex primo & secundo; differentia autem est Sp; Z^s. autem est id quod sub tribus lateribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis tribus lateribus.

In formula præcedentium quam hic resumimus.

$$\begin{array}{l} \quad\quad -BDA - BA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \infty O \\ \quad\quad + BCA + DA^2 \end{array}$$

Intelligantur latera B & C tam simul quàm sigillatim, majora esse quàm D, & rectangulum BC majus quàm duo simul BD & CD. Quo posito & adhibita hac interpretatione ut excessus summæ laterum B & C suprà D sit R; item excessus rectanguli BC suprà summam reliquorum BD & CD sit Sp, at solidum BCD sit 2^s. manifestum est nos incidere in æquationem propositam, & A explicabile esse tam de B & C suprà, quàm de D infrà.

Determinatio.

HUJUS æquationis determinatio unica est eaque minor, tum scilicet duo latera suprà æqualia sunt, neque alia reperiri potest laterum æqualitas, cùm unumquodque ex duobus prioribus majus sit quàm tertium.

Posito ergo quod B sit æquale ipsi C in formula præmissa, & augmentando ut in prima propositione primi capitis, aut prima secundi æquationum cubicarum, inveniemus D esse $2A - R$, & Sp esse $2RA - 3A^2$, unde tandem deducetur valor ipsius A,

$$\frac{\frac{3Z^s + \frac{1}{3}Sp}{R}}{\frac{2}{3}R - \frac{2Sp}{R}}$$

Propositio sexta irregularis.

Si $Z^{s} + Sp\,A + A^{3} \infty O$.

In hac æquatione A est explicabile de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium, vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua ipsa oriri possit. Potest tamen constitutio illius deduci, ex quatuor proportionalibus, hac ratione ut differentia extremarum sit Z^{s}; rectangulum

$$\overline{\tfrac{1}{3} Sp}$$

autem sub extremis vel mediis sit $\tfrac{1}{3}$ Sp, & A sit differentia mediarum.

Sed neque hæc, neque aliæ similes quæ de solis lateribus infrà explicari possunt æquationes ad usum communem revocari possunt, nisi per transmutationem aliarum æquationum, quod etiam rarò aut nunquam accidit.

Propositio septima irregularis.

Si $Z^{s} + RA^{2} + A^{3} \infty O$.

Rursus in hac æquatione A explicabile est de unico latere infrà, nec ulla datur vel trium vel etiam duorum laterum multiplicatio, ex qua illa oriri possit. Facile tamen hæc æquatio transmutabitur in aliam similem ei, quæ habetur propositione 6ª seu præcedenti, unde constitutio ejus ex quatuor proportionalibus deducetur ut suprà; sed neque alia esse potest, quàm præcedentis, utilitas.

Propositio octava irregularis

Si $Z^{s} + A^{3} \infty O$.

Unicum etiam est latus infrà, idemque æquale lateri cubico ipsius Z^{s}.

CAPUT TERTIUM.

HOC caput tot propoſitiones habet, quot præcedens, atque has illarum ſigillatim inverſas, hac ratione, ut quæ illic ſuprà erant latera, hic ſint infrà, & è contrario. Determinationes autem in utroque capite ſunt penitus eædem: itaque expoſita formula univerſali, quinque priorum propoſitionum regularium, enumeratiſque breviter ſingulis octo propoſitionibus, reliqua ad idem caput præcedens remittemus.

Pro formula igitur univerſali, intelligantur duo latera infrà, & unum ſuprà hac ratione

$$B + A \propto O$$
$$C + A \propto O$$
$$D - A \propto O$$

fiatque multiplicatio qualem conſuevimus habita ratione ſignorum, atque ita reperiemus.

$$\begin{matrix} & + BDA - BA^2 & \\ BCD & + CDA - CA^2 & - A^3 \propto O. \\ & - BCA + DA^2 & \end{matrix}$$

Qua ratione duo latera infrà intelliguntur æqualia ipſis B & C; illud autem quod eſt ſuprà, intelligitur æquale ipſi D.

Jam differentia inter ſummam laterum B & C & unicum D, eſto R; differentia autem inter ſummam rectangulorum BD & CD atque unicum BC, eſto S p: item ſolidum BCD eſto Z ſ. Hoc pacto prout exceſſus erit pænes hæc vel illud, vel etiam aliquando nullus, orientur quinque propoſitiones regulares.

Propositio prima.

SI $Zs + SpA + RA^2 - A^3 \infty O$.
Sunt tria latera, duo quidem infrà, & unum suprà, idemque majus summa duorum priorum, & differentia est R; rectangulum autem sub summa priorum & tertio excedit rectangulum sub duobus prioribus, & excessus est Sp. At Zs. est id quod sub tribus continetur, & A explicabile est de quolibet ex ipsis.

Determinatio.

PRo detrminatione, positis duobus lateribus quæ sunt infrà, inter se æqualibus, recurremus ad primam propositionem secundi capitis, mutatis tamen iis quæ hic sunt infrà, in ea quæ ibi erant suprà, reperiemus valorem ipsius A infrà, æquale esse.

$$\frac{\frac{3Zs}{R} + \frac{1}{3}Sp}{\frac{2Sp}{R} + \frac{2}{3}R}$$

Propositio secunda.

SI $Zs. + SpA - A^3 \infty O$.
Vide secundam propositionem 2^1 capitis, mutatis tamen suprà & infrà, ut jam diximus, neque etiam determinatione differunt.

Propositio tertia.

SI $Z^{f} + Sp A - RA^{2} - A^{3} \propto O$.
Vide tertiam ſecundi capitis, mutatione facta ut diximus, determinatio eadem erit.

Propositio quarta.

SI $Z^{f} - RA^{2} - A^{3} \propto O$.
Vide iiſdem mutatis, quartam ſecundi capitis ejuſque determinationem.

Propositio quinta.

SI $Z^{f} - Sp A - RA^{2} - A^{3} \propto O$.
Vide iiſdem mutatis, quintam propoſitionem 2[i] capitis ejuſque determinationem.

Propositio ſexta irregularis.

SI $Z^{f} - Sp A - A^{3} \propto O$.
Unicum eſt latus ſuprà, pro quo vide ſextam propoſitionem ſecundi capitis. Notabis tamen hanc utilem eſſe poſſe.

Propositio ſeptima irregularis.

SI $Z^{f} + RA^{2} - A^{3} \propto O$.
Unicum eſt latus ſuprà pro quo vide ſextam propoſitionem 2[i] capitis. Notabis tamen hanc utilem eſſe poſſe.

Propositio octava irregularis.

SI $Z^{f} - A^{3} \propto O$.
Unicum eſt latus ſuprà, æquale lateri cubico Z^{f}.

CAPUT QUARTUM.

HOc etiam caput univerſum eſt primi cubicorum; differunt enim in eo tantum quòd quæ illic erant latera ſuprà, hic ſunt infrà, idque in prima propoſitione, quæ prorſus regularis eſt: at in ſecunda, quæ aliquo pacto eſt irregularis, ambo latera remanent infrà, etiamſi illic alterum eſſet ſuprà, alterum infrà, nec etiam in ambabus formula eſt eadem, quapropter utramque hic apponemus, etiamſi utraque ſit inutilis, niſi ex tranſmutatione aliunde oriatur, quod etiam raro, aut nunquam accidere poteſt.

Propoſitio prima.

SI $Z^{s}. + Sp\,A + RA^{2} + A^{3} \infty O$.
Et $\frac{Z^{s}}{R}$ non ſit æquale ipſi Sp.

Sunt tria latera poſitiva infrà, quorum ſumma eſt R, tria rectangula ſub ipſis, binis ac binis ſumptis ſimul, conſtituunt Sp: at Z^{s}. eſt quod ſub tribus continetur, & A explicabile eſt de quolibet ex ipſis.

Statuantur enim tria latera poſitiva infrà, in binomiis ut conſuevimus hoc pacto

$$B + A \infty O$$
$$C + A \infty O$$
$$D + A \infty O$$

& fiat multicatio ut in ſuperioribus, orieturque

$$\begin{matrix} & + BDA + BA^{2} & \\ BCD & + CDA + CA^{2} & + A^{3} \infty O \\ & + BCA + DA^{2} & \end{matrix}$$

quæ æquatio si hanc interpretationem accipiat, ut B + C + D sit R; & BD + CD + BC sit S p, item BCD sit Z sol. incidemus in æquationem propositam, ubi manifestum est A explicabile esse tam de B, quàm de C, & de D, infrà.

Determinatio eadem prorsus est, quæ in prima propositione primi capitis cubicarum, atque id tam in majori quàm in minori determinationum ibi expositarum.

Propositio secunda.

SI Z s. + S p A + R A² + A³ ∞ O.
Sit autem $\frac{Z\ s}{R}$ ∞ S p.

Sunt duo latera ambo infrà, alterum quidem æquale longitudine ipsi R, alterum autem non propriè latus, sed planum æquale S p, & Z s est id quod continetur sub primo latere in planum, quod secundi locum obtinet sive S p R, & A explicabile est de quolibet.

Statuatur enim R + A ∞ O
& S p + A² ∞ O

ut sint latus & planum, ambo positiva infrà, fiatque multiplicatio; atque ita orietur hæc æquatio.

R S p + S p A + R A² + A³ ∞ O.

Jam R S p esto Z s, qua ascita interpretatione incidemus in æquationem propositam, quæ proinde explicabilis est tam de A æquali, ipsi R, quàm de A æquali potentiæ ipsi S p o, ut est propositum.

Notæ circa æquationes præmissas, & circa eas quæ ad altiores gradus aut potentias pertinere possunt.

Prima.

OMNIS affectio sub latere positivo suprà, sequitur naturam sui signi, censetur enim affirmativa vel negativa suprà, prout illa afficitur signo affirmationis vel negationis. Idem intellige de affectionibus sub omnibus gradibus, atque etiam de omnibus potentiis ejusdem lateris positivi suprà.

Secunda.

UT autem innotescat etiam quid censendum sit de affectionibus sub latere positivo infrà, ejusque gradibus & potentiis, præmittendum est primum id quod jam notavimus, nempe affirmativum infrà æquivalere negativo suprà, & è contrario.

Deinde circa latera suprà, ideo + multiplicatum per + producere +, quia multiplicator affirmativus affirmat affirmationem multiplicati. Ideo autem — per — producere +, quia multiplicator negationis negat negationem multiplicati, atque ita constituit affirmationem. At + per — vel — per +, ideo producere —, quia multiplicator affirmativus affirmat negationem multiplicati, vel multiplicator negativus negat affirmationem multiplicati, atque ita constituit negationem.

Hinc igitur, quia latus affirmativum infrà, æquivalet negativo suprà, omnis affectio sub latere positivo infrà, sequitur contrariam sui signi naturam, ita ut si sit affirmativum infrà, æquivaleat negativo suprà & è contrario.

Contra

Contra verò quadratum lateris positivi infrà, æquivalet quadrato lateris positivi suprà, quia fit ex + A in + A, vel ex — A in — A, unde quovis modo fit + A^2 suprà, vel æquivalens. Itaque omnis affectio sub quadrato lateris positivi infrà, sequitur naturam sui signi affirmativi vel negativi: in altioribus verò gradibus, simili argumento concludemus idem accidere affectioni sub cubo, quod sub suo latere: & quadratoquadrato, quod suo quadrato, atque ita continuè per gradus altiores, ut illi qui statuuntur in locis imparibus, imitentur latus ipsum; qui autem statuuntur in locis paribus, imitentur quadratum.

Insuper omnis affectio, quæ retinet naturam sui signi, ducta in affectionem, quæ itidem naturam sui signi retineat, producit aliam, quæ etiam naturam, sui signi retinet. Sed & affectio quæ sequitur contrariam sui signi naturam, ducta in affectionem quæ contrariam sui signi naturam sequatur, producit aliam, quæ sequitur eandem sui signi naturam.

Contrarium autem accidit dum ducuntur inter se duæ affectiones, quarum una sui signi naturam sequatur, altera contrariam, quæ enim inde fit affectio, sequitur contrariam sui signi naturam.

Tertia.

Ex duabus notis præmissis non difficile erit explicare, cùm ex multiplicatione binomiorum in omnibus capitibus jam expositis, circa quadratas & cubicas affectiones, producatur tandem æquatio quæ nihilo æquivaleat, id autem uno aut altero exemplo illustrabimus.

Proponatur primum, ut in propositione secunda quadraticatum, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} \quad +BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio orta eſt ex ductu affectionum B — A & C + A in ſe invicem , intelligatur ergo primo caſu, B ſuprà æquari ipſi A ſuprà unde B — A æquatur nihilo ; quia tam B quàm A , cùm ſint ſuprà , ſequuntur naturam ſui ſigni , quæ ſigna cùm ſint contraria , manifeſtum eſt B & A tollere ſe invicem.

Jam C + A cujuſcumque valoris ſit ducatur in B — A , fit rurſus manifeſtò

$$\begin{array}{l} \quad +BA \\ BC - CA - A^2 \propto O. \end{array}$$

Ubi omnes affectiones ſequuntur naturam ſui ſigni , quia quæ ipſas produxerunt , ſui ſigni naturam ſequebantur , & quia B æquatur A , ideo BC æquatur CA , quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem + BC — CA.

Item BA æquatur A^2 , quare propter ſigna contraria tollunt ſe invicem + BA — A^2 , atque ita omnes affectiones ſimul nihilo æquivalent , dum ſcilicet B æquatur ipſi A ſuprà.

Sed ſecundo caſu, eſto C ſuprà æquale ipſi A infrà : unde C + A æquatur nihilo , quia ipſum + A infrà ſequitur contrariam ſui ſigni naturam , æquivaletque ipſi — A ſuprà , ſicque tollunt ſe invicem + C + A.

Jam B — A cujuſcumque valoris ſit , ducatur in C + A , fit manifeſtò

$$\begin{array}{l} \quad +BA \\ BC - CA - A^2. \end{array}$$

Ubi duæ affectiones ſub latere A, ſcilicet + B A, ſequun-
— CA.

tur contrariam sui signi naturam; at $-A^2$ & $+BC$ sui ipsius signi naturam sequuntur; & quia C æquatur A, ideo BC æquatur BA, & CA æquatur A^2, quare tollunt se invicem $+BC+BA$, quia BC eandem, BA vero contrariam sui signi sequitur naturam. Eadem ratione tollunt se invicem $-CA-A^2$ quia CA contrariam, A^2 vero eandem sui signi naturam sequitur: atque ita rursus omnes affectiones simul nihilo æquivalent, cùm ipsum C suprà æquetur ipsi A infrà.

Cùm vero sic interpretamur æquationem ut BC sit Zp, at $+B$ $-C$ fit R, ut sic $Zp + RA - A^2 \propto O$. Patet ipsum R, esse differentiam inter B majus & C minus; quia illæ affectiones $+BA$ & $-CA$ habent signa diversa, & præterea vel ambæ eandem, vel ambæ contrariam sui signi naturam sequuntur, impediunt ergo signa diversa ne simul jungi debeant.

Item in hac æquatione $Zp + RA - A^2 \propto O$.

Dum A intelligitur esse suprà, omnes affectiones sunt suprà, sequunturque naturam sui signi, & sic sola affectio A^2 æquatur reliquis duabus simul.

E contrario vero cum A intelligitur esse infrà, tum Zp & A^2 sequuntur naturam sui signi, RA vero contrariam, sicque $+RA$ infrà æquivalet $-RA$ suprà. Unde $+RA-A^2$ simul æquivalent ipsi Zp.

Jam in secundo exemplo proponatur æquatio propositionis primæ secundi capitis cubicarum

$$Z^f - SpA + RA^2 + A^3 \propto O.$$

Cujus constitutionem deduximus ex multiplicatione sive ductu harum trium affectionum, $B-A$
$C-A$
$D+A$

Ex quo oritur hæc æquatio, poſito tamen quod D majus ſit quàm B & C ſimul.

$$\begin{array}{l} \qquad -BDA+DA^2 \\ BCD-CDA-BA^2+A^3 \propto O \\ \qquad +BCA-CA^2 \end{array}$$

Quam quidem æquationem legitimam eſſe, ſive B ſuprà æquetur A ſuprà, ſive C ſuprà æquetur A ſuprà, ſive tandem D ſuprà æquetur A infrà, ſic oſtendimus.

Ponamus primo caſu B ſuprà æquari A ſuprà, unde $B-A \propto O$.

Jam ſub ipſo valore A, quicquid valeat tam $C-A$, quàm $D+A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{array}{l} \quad +CA \\ CD-DA-A^2; \end{array}$$

Ubi omnes affectiones particulares ſequuntur naturam ſui ſigni, quia tam A, quàm B, C, D ex quibus ortæ ſunt, ſunt ſuprà. Hoc autem totum productum quicquid valeat ducatur in $B-A$, atque ita tandem orietur

$$\begin{array}{l} \qquad -BDA+DA^2 \\ BCD-CDA-BA^2+A^3 \\ \qquad +BCA-CA^2 \end{array}$$

Cujus omnes affectiones ſequuntur ſui ſigni naturam; propter rationem jam allatam. Quoniam ergo B ponitur æquale ipſi A, ideo BCD æquatur CDA, atque ita tollunt ſe invicem $+BCD-CDA$; eadem ratione tollunt ſe invicem $-BDA+DA^2$: item $+BCA-CA^2$ ac tandem $-BA^2+A^3$, unde patet omnes affectiones ſimul, nihilo æquivalere, dum B æquatur ipſi A.

Secundo casu C suprà æquetur ipsi A suprà; unde $C - A \infty O$.

Jam sub ipso valore A quicquid valeat tam $B - A$, quàm $D + A$, multiplicentur invicem hæ duæ affectiones, orieturque manifestò

$$\begin{matrix} & + BA & \\ BD & - DA & - A^2 \end{matrix}$$

Ubi omnes affectiones particulares sequuntur naturam sui signi, quia A, B, C, D ponuntur esse suprà. Hoc autem totum productum, quicquid valeat, ducatur in $C - A$, orietur rursus ut in primo casu

$$\begin{matrix} & - BDA & + DA^2 & \\ BCD & - CDA & - BA^2 & + A^3 \infty O \\ & + BCA & - CA^2 & \end{matrix}$$

Ubi etiam omnes affectiones sequuntur naturam sui signi propter eandem rationem. Quoniam ergo C ponitur æquari ipsi A, ideo BCD æquatur ipsi BDA, atque ita tollunt se invicem $+ BCD - BDA$: eadem ratione tollunt se $- CDA + DA^2$; item $+ BCA - BA^2$: ac tandem $- CA^2 + A^3$. Unde patet quod existente C æquali ipsi A, omnes affectiones simul nihilo æquivalent.

Tertio & ultimo casu, intelligatur D suprà æquari A infrà. Quo pacto $D + A \infty O$.

Jam sub ipso valore A, quicquid valeat tam $B - A$, quàm $C - A$, ducantur invicem hæ duæ affectiones, orieturque

$$\begin{matrix} & - BA & \\ BC & - CA & + A^2; \end{matrix}$$

Ubi, quia tam B, quàm C sunt suprà, A autem infrà, duæ affectiones BC & A^2 sequuntur naturam sui signi,

duæ verò reliquæ $\frac{BA}{CA}$ contrariam. Hoc autem totum productum quicquid valeat, ducatur in D + A, orieturque idem omnino quod primo & secundo casu, nempe

$$\begin{array}{c} - BDA + DA^2 \\ BCD - CDA - BA^2 + A^3 \\ + BCA - CA^2 \end{array}$$

Hic verò omnes affectiones sub latere A, atque etiam cubi A^3 sequuntur contrariam sui signi naturam per regulas præmissas, quia oriuntur ex multiplicatione affectionum, BD, CD, BC, & A^2, quæ omnes sequuntur naturam sui signi in A quod sequitur contrariam.

Quoniam ergo D suprà ponitur æquale A infrà, ideo BCD æquatur BCA, unde tollunt se invicem + BCD + BCA: nam etiam si signa sint eadem, tamen natura est contraria. Eadem ratione tollunt se invicem — BDA — BA^2, item — CDA — CA^2, & denique + DA^2 + A^3.

Unde patet quod existente D supra æquali ipsi A infrà, omnes affectiones simul nihilo æquivalent. Sive ergo B vel C suprà æquetur ipsi A suprà, sive D suprà æquetur A infrà, semper stabit æquatio, & omnes affectiones simul nihilo æquivalebunt.

Itaque in æquatione proposita $Z^s. - Sp A + RA^2 + A^3 \infty O$.

Sp intelligitur esse differentia inter summam duorum planorum BD, CD, & planum BC: at longitudo R est differentia inter summam laterum B, C, & latus D, quæ sunt æqualia tribus illis de quibus potest explicari A, in æquatione. Rursus cùm in eadem æquatione A intelligatur esse suprà, tunc omnes affectiones sequuntur naturam sui signi, unde sola affectio Sp A æquatur tribus re-

liquis simul sumptis. Contrà verò cùm A intelligitur esse infrà, tunc affectiones sub latere A & ipsius cubo A^3 sequuntur naturam contrariam sui signi, duæ autem reliquæ eandem, unde — S P A infrà æquivalet + S P A suprà, & + A^3 infrà æquivalet — A^3 suprà, sicque sola affectio A^3 æquatur tribus reliquis simul sumptis.

His duobus exemplis ritè perceptis, non erit difficile idem in omnibus æquationibus extendere, quæ ex duobus, tribus vel etiam pluribus lateribus efformabuntur.

Quarta.

Cum autem planum aliquod ex se ponitur sequi naturam contrariam sui signi, tunc occurre posset difficultas circa affectiones lateris quod potentiâ æquale intelligitur eidem plano, & circa affectiones aliorum graduum ejusdem lateris, quæ difficultas etiamsi non difficilè solvi possit, speciatim in omnibus affectionibus oblatis, quia tamen prolixa esset solutio, præcipuè quia extendi deberet non ad planum tantùm, sed etiam ad gradus altiores, ideò nos solutionem afferemus in universum, quæ ad quascumque æquationes, etiam eas de quibus jam egimus, extendi potest, eamque aliquo exemplo illustrabimus.

Intelligatur ergo B P suprà + A^2 infrà ∞ O. Ubi manifesto A^2 quod planum est, sequitur naturam sui signi contrariam. Sit autem quævis æquatio, quæ orta sit ex multiplicatione hujus affectionis B P + A^2 in aliam quamcumque affectionem, in qua æquatione A sit explicabile de latere A, quod potentiâ æquale sit ipsi B P. Ut ostendamus omnes affectiones æquationis simul nihilo æquavalere sic ratiocinabimur. Quia affectio B P + A^2 in aliam quamcumque affectionem ducitur, certum est in ipsam duci primum separatim B P quod sequitur con-

trariam: quicquid ergo producat Bp, id omne ſimul, æquale eſt ei, quod producitur ab A^2 propter æqualitatem Bp & A^2; ſed & ſingula producta ſingulis productis ſunt æqualia propter eandem rationem, & in ſingulis æqualibus ſigna erunt eadem, quia Bp & A^2 habent idem ſignum. At propter contrariam naturam Bp & A^2 ſingula producta æqualia contrariæ erunt naturæ, atque idcircò tollent ſe invicem, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo ſit æqualis, ut proponitur.

Ut autem in omnibus æquationibus idem locum habere manifeſtum ſit, intelligatur $Bp - A^2 \infty O$, ſintque tam Bp quàm A^2 ſuprà, & utrumque ſequatur naturam ſui ſigni. Tunc facta multiplicatione, ut dictum eſt, ſingula producta ſingulis ſunt æqualia & ejuſdem naturæ; ſed ſigna erunt contraria, quia Bp & A^2 habent contraria, atque ita rurſus tollent ſe invicem omnes affectiones, ita ut nihil omnino remaneat, & tota æquatio nihilo ſit æqualis, ut proponitur.

In exemplo proponatur, ut in ſecunda propoſitione primi capitis cubicarum, $Bp + A^2 \infty O$. Ita ut Bp ſit ſuprà, at A^2 infrà, & ambo æqualia, ducatur autem hæc affectio in hanc aliam, cujuſcumque ſit valoris $C - A$ orietur manifeſtò $BpC - BpA + CA^2 - A^3$, ſed ita ut $+ BpC - BpA$ fiat ſpeciatim ex ductu Bp in $C - A$; at $+ CA^2 - A^3$ fiat ex A^2 in $C - A$. Quia ergo $+ Bp$ ducitur in $+ C$ & producit BpC, & $+ A^2$ ducitur in idem C & producit CA^2, ſunt autem æqualia Bp & A^2, atque idem poſſident ſignum, erunt æqualia producta BpC, idemque ſignum poſſidebunt; at quia diverſæ ſunt naturæ Bp & A^2, illud ſcilicet Bp ſequitur eandem ſui ſigni naturam, hoc verò A^2 contrariam; idem ergo eorum productis accidet, ut alterum eandem ſui ſigni naturam, alterum verò contrariam ſequatur: tollent igitur ſe invicem $+ BpC$ & $+$

CA^2,

CA^2. Eadem ratione quia Bp & A^2 æqualia ſub eodem ſigno, ſed diverſæ naturæ ducuntur ſigillatim in A & producunt — BpA — A^3, erunt hæc producta æqualia & ſub eodem ſigno, ſed diverſæ naturæ; ipſa ergo tollent ſe invicem, unde tota æquatio nihilo æquivalet. Nec erit difficile ſimili argumento uti in quibuſcumque æquationibus, ſemper enim ſingulæ affectiones ſingulis erunt æquales, quia fient ex æqualibus in eandem: at vel ſigna erunt eadem & natura contraria, vel natura erit eadem & ſigna contraria; ſicque tollent ſe invicem ſingulæ affectiones, & tota æquatio nihilo æquivalebit.

Quinta.

OPERÆ etiam pretium eſt ſcire quot modis complicari poſſint affectiones ſpeciales, ut ex iis affectiones univerſales oriantur ad condendas æquationes omnium potentiarum quadraticarum, cubicarum, quadratoquadraticarum, quadratocubicarum &c.

Ad hoc autem habenda primum eſt ratio numeri graduum ex quibus ipſa potentia componitur: nam quot modis potentia ipſa ex ſuis gradibus gigni poterit, tot modis complicari poterunt affectiones ſpeciales ad condendam æqualitatem. Sic latus per ſe, latus tantùm eſt. Planum fit vel per ſe, vel ex duobus lateribus. Solidum fit vel per ſe, vel ex plano & latere, vel ex tribus lateribus. Planoplanum fit vel per ſe, vel ex ſolido & latere, vel ex duobus planis, vel ex plano & duobus lateribus, vel ex quatuor lateribus. Planoſolidum fit vel per ſe, vel ex planoplano & latere, vel ex ſolido & plano, vel ex ſolido & duobus lateribus, vel ex duobus planis & latere, vel ex plano & tribus lateribus, vel ex quinque lateribus. Solidoſolidum fit vel per ſe, vel ex planoſolido & latere, vel ex planoplano & plano, vel ex plano-

plano & duobus lateribus, vel ex duobus ſolidis, vel ex ſolido & plano & latere, vel ex ſolido & tribus lateribus, vel ex tribus planis, vel ex duobus planis & duobus lateribus, vel ex plano & quatuor lateribus, vel ex ſex lateribus. Atque eodem modo & ordine in infinitum.

Secundo habenda eſt ratio affectionum ſpecialium ex quibus totalis gignitur: nam ex illis quædam aliquando per ſe æquationem aliquam conſtituunt, quæ de unico, vel etiam de pluribus lateribus explicabilis eſt, omnino autem quævis æquatio ſuperioris ordinis formari poteſt ex duabus, vel pluribus æquationibus inferiorum ordinum in ſe ductis, atque id tot modis, quot jam diximus potentias ex ſuis gradibus gigni poſſe. Exempli gratia, æquatio cubocubica poteſt formari ex quadratocubica ducta in lateralem, vel ex quadratoquadratica in quadraticam, vel ex quadratoquadratica & duobus lateribus, vel ex duabus cubicis, vel ex cubica in quadraticam & lateralem, vel ex tribus quadraticis & cæt.

Hinc patet eò pluribus modis complicari poſſe affectiones ſpeciales ad condendam æquationem aliquam, quò altior eſt illa æquatio, ſeu quò altior eſt illius potentia: atque ipſam altiorem gigni poſſe ex omnibus inferioribus debitè complicatis nullâ exceptâ, & prætereà eandem per ſe ipſam conſtitui aliquando nullo inferiorum habito reſpectu.

Sexta.

Illud autem notatu digniſſimum eſt, quamcumque æquationem de tot lateribus explicabilem eſſe, quot ſunt illa de quibus explicari poſſunt omnes affectiones, ſeu æquationes ſpeciales à quibus illa producta eſt. Immo & latera illius lateribus illarum ſingula ſingulis eſſe æqualia ſive potiùs eadem; atque adeò ejuſdem affectionis & naturæ.

Exempli gratia æquatio lateris ut $B - A \infty O$ de unico tantùm latere suprà explicabilis est, sicut & $C - A \infty O$. At ambæ invicem ductæ producunt quadraticam æquationem

$$\begin{array}{l} \quad - BA \\ BC - CA + A^2 \infty O: \end{array}$$

Quæ de iisdem duobus lateribus suprà est explicabilis.

Rursus si hæc æquatio quadratica ducatur in hanc lateralem $D + A \infty O$; quæ de unico latere infrà explicari potest, producetur hæc æquatio cubica.

$$\begin{array}{l} \quad\quad - BDA - DA^2 \\ BCD - CDA - CA^2 + A^3 \infty O \\ \quad\quad + BCA + DA^2 \end{array}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus explicabitur, duobus quidem suprà, altero verò infrà.

Eodem modo si ipsa æquatio cubica ducatur in aliam lateralem de unico latere explicabilem, producetur æquatio quadratoquadratica, quæ de quatuor lateribus explicari poterit.

Item hæc æquatio cubica $Z^{\text{ſ}}. - S_p A - A^3 \infty O$.

De unico tantùm latere suprà est explicabilis

Hæc quadratica $B_p - RA - A^2 \infty O$

De duobus, altero suprà, & altero infrà: his ergo duabus æquationibus in se invicem ductis fiet hæc quadratocubica

$$\begin{array}{l} \quad - B_p S_p A + RS_p A^2 - B_p A^3 \\ B_p Z^{\text{ſ}} - RZ^{\text{ſ}} A - Z^{\text{ſ}} A^2 + S_p A^3 + RA^4 + A^5 \infty O \end{array}$$

Quæ de tribus iisdem lateribus, duobus quidem suprà, & tertio infrà, est explicabilis, atque ita de reliquis.

Cùm verò quædam æquatio per se ipsam constituitur,

nec constare potest ex ductu duarum aut plurium inferiorum, tunc illam de unico tantùm latere contingit explicari posse, quales sunt omnes illæ irregulares de quibus diximus suprà cap. 2° & 3° cubicarum.

Præterea si accidat omnia latera alicujus æquationis esse fictitia, & impossibilia, ejusmodi æquatio in quamcumque aliam ducta tertiam producet, quæ de lateribus secundæ æquationis tantùm explicabilis erit; quòd si etiam secundæ illius latera omnia fictitia sint, quæ ex ambabus primâ scilicet & secundâ oritur æquatio, habebit latera omnia fictitia, & impossibilia. At si duarum priorum æquationum latera quædam fictitia sint & quædam positiva, tunc æquatio quæ ab ipsis duabus producitur, tot latera habebit positiva, quot in duabus à quibus producta est, reperiuntur. Cætera erunt etiam fictitia.

In exemplo esto hæc æquatio quadratica

$$Zp - RA + A^2 \propto O.$$

& intelligatur Zp majus esse quàm $\frac{1}{4} R^2$ unde duo latera de quibus aliàs explicabilis esset ipsa æquatio, sunt fictitia: esto quoque hæc æquatio lateralis $B - A \propto O$ de unico latere suprà explicabilis, ducanturque in se invicem æquationes ipsæ, unde producetur hæc æquatio cubica.

$$\begin{array}{l} \quad\; - BRA + BA^2 \\ ZpB - ZpA + RA^2 - A^3 \propto O. \end{array}$$

Quæ quidem æquatio de unico tantùm latere suprà est explicabilis, reliqua duo sunt fictitia.

Corollarium.

EX hac nota intelligi poteſt methodus, quâ dignoſci poterit num æquatio propoſita habeat quædam latera fictitia, an verò omnia ſint poſitiva, an etiam omnia fictitia; illud autem aliquando & longiſſimæ & difficillimæ indagationis eſt, præcipuè in æquationibus ultrà cubum elatis & multipliciter affectis. In univerſum autem conſiderandum erit quot modis æquatio propoſita ex aliis inferioribus produci poterit, habitâ ratione formulæ, & quot modis accidere poterit ut illæ inferiores habeant latera, vel fictitia, vel poſitiva, quidve tam hæc, quàm illa efficiant, dum inter ſe multiplicantur: nam hoc intellecto, dum proponetur illa æquatio, examinandum erit num id illi conveniat, quod à parte laterum fictitiorum produci debuit, num vero id quod à parte laterum poſitivorum exempli gratia, propoſitâ hac æquatione cubicâ

$$C\,s. - Dp\,A + FA^2 - A^3 \propto O.$$

Cujus formula ſimilis eſt ei quam ſub finem notæ ſextæ adduximus, patet eam produci potuiſſe à duabus, alterâ planâ, ſub hac formula

$$Zp - RA + A^2 \propto O$$

Altera autem laterali ſub hac formulâ $B - A \propto O$. Unde æquationis productæ formula eſt hæc, quæ etiam ibi adducta eſt.

$$\begin{array}{l} \quad - BRA + BA^2 \\ ZpB - Zp\,A + RA^2 - A^3. \end{array}$$

Conferantur ergo inter ſe ſingula homogenea ambarum ipſarum æquationum, ſcilicet $C\,s.$ cum $Zp\,B$, item

D P cum ambobus ſimul BR & Z P, & longitudo F, cum ambabus B & R: his enim collatis ſi reperiatur Z P majus eſſe quàm $\frac{1}{4}$ R 2, concludemus latera æquationis planæ fuiſſe fictitia atque adeo & eadem, in æquatione cubica, fictitia eſſe. Quod ſi Z P non ſit majus quàm $\frac{1}{4}$ R 2, erunt in utraque æquatione latera poſitiva. Verùm tota difficultas conſiſtit in modo & ratione examinandi: hîc enim in exemplo, videndum eſſet, num longitudo F ſic dividi poſſit in duas partes, quæ referant B & R, & rectangulum ſub ipſis demptum ex D P relinquat $\frac{1}{4}$ quadrati alterutrius partium, putà ipſius R. Ac præterea C ſ. applicatum ad reliquam partem exhibeat idem $\frac{1}{4}$ R 2, hoc enim caſu æquatio propoſita explicabilis erit de tribus lateribus, duobus quidem æqualibus, tertio verò utcumque, & ambo æqualia ſimul æquivalebunt primæ portioni ipſius F, puta ipſi R, eritque hic caſus minoris majoriſve determinationis.

Aliter, quod tamen eòdem recidit, dividatur longitudo F, ſic ut rectangulum ſub partibus unà cum $\frac{1}{4}$ quadrati unius portionum æquale ſit D P, eſt autem hujuſce diviſionis problema planum de duobus lateribus explicabile, & determinationi obnoxium, ac tunc ſi diviſio fieri non poſſit, ſtatim pronunciare licet æquationis planæ latera fuiſſe fictitia. Si autem diviſio fieri poſſit, ſitque ipſa maxima eademque unica, cùm ſcilicet altera pars ipſi B correlata, erit $\frac{1}{3}$ F, altera autem ipſi R correlata, erit $\frac{2}{3}$ F, tunc niſi C ſ ſit præciſe $\frac{1}{27}$ F 3 erit rurſus æquatio plana, fictitia: exiſtente autem C ſ. æquali ipſi $\frac{1}{27}$ F 3, erit tunc caſus majoris determinationis, de qua dictum eſt propoſ. prima, cap. 1 cubicarum. At verò ſi facta diviſione longitudinis F ut dictum eſt, non incidamus in maximam, cùm ſcilicet portio ipſi B correlata non erit $\frac{1}{3}$ F, ſed major, vel minor (duplex enim hoc caſu contingere poteſt ſolutio.) tunc

si ductâ alterutrâ ex iis duabus partibus quæ ipsi B correlatæ sunt, in $\frac{1}{4}$ quadrati alterius sibi congruentis, fiat solidum aquale ipsi C f, habebitur casus minoris determinationis, in quo tria latera erunt positiva, duo quidem æqualia, ad æquationem quadraticam pertinentia, quorum summa erit illa portio longitudinis F, quæ ipsi R correlata est; & tertium singulis productis inæquale, quod ad æquationem lateralem pertinebit, eritque tertium illud portio ipsi B correlata. Quòd si ex duobus illis solidis quæ hac ratione fieri possunt, (videlicet ob duplicem solutionem, quæ contingere potest, divisa longitudine F, ut proponitur) neutrum æquale reperiatur ipsi C f, sit autem hoc C f, maximo prædictorum minus, minimo majus: tunc tria æquationis latera erunt positiva, sed inæqualia. Si tandem C f, vel maximo prædictorum majus, vel minimo minus extiterit, hoc casu erunt duo illa latera fictitia quæ ad æquationem planam pertinebunt, ac solum reliquum illud erit positivum, quod æquationis lateralis proprium erit.



DE GEOMETRICA PLANARUM ET CUBICARUM ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

ÆQUATIONEM Geometricè resolvere, est invenire Geometricè omnia latera de quibus ipsa æquatio explicabilis est.

Inventio autem ejusmodi laterum dicitur esse Geometrica, cùm illa deducitur ex locis propriis secundùm Geometriæ leges descriptis, atque inter se certo ac legigitimo modo compositis; ita ut ex ipsorum locorum sectione vel tactione, lineæ quædam rectæ deducantur quæ latera quæsita exhibeant.

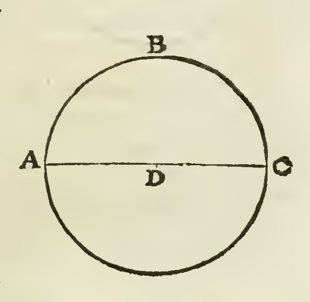
Quoniam verò ista laterum inventio pendet à locis Geometricis, non abs re fuerit aliqua de ipsis locis præmittere, tum circa eorum naturam atque constitutionem, tum etiam circa eorumdem divisionem, ac diversos gradus; ut quæ simpliciora sunt, à magis compositis distinguantur.

Locus ergo Geometricus in universum, est magnitudo quædam ex qua deduci possunt quotcunque aliæ magnitudines secundùm eandem atque uniformem quandam legem, quæ eandem aliquam atque uniformem sortiantur proprietatem.

De locis ejusmodi complures libros antiqui conscripsere, quorum numerum & titulos apud Pappum Alexandrinum legere licet; sed illi temporis injuria, summo rei literariæ detrimento, perierunt. Neque nos eorum instaurationem hîc intendimus, quia ad nostrum institutum,

tutum, paucis iisque non admodùm difficilibus, egemus. Non abs re tamen fore judicavimus selectiores aliquot ex illustrioribus locis in exemplum hîc afferre, quò eorum natura & constitutio magis elucescat. Nec ultra constructionem seu compositionem ipsorum progrediemur : demonstrationem autem, quia plerumque nimis longa est, ad eam partem Geometriæ quæ talem materiam tractare debet, remittemus.

In primo ergo exemplo. Esto quævis circuli circumferentia ABC, cujus centrum sit D; manifestum est ergo rectas omnes ab ipsa circumferentia ad centrum D ductas esse æquales. Itaque ex præmissa loci definitione, circumferentia illa locus est; quandoquidem ea magnitudo est ex qua deductæ quotcumque aliæ magnitudines, lineæ rectæ scilicet, secundùm eandem atque uniformem legem, puta quæ ad idem centrum D tendant, eandem aliquam atque uniformem sortiuntur proprietatem, ut scilicet omnes sint inter se æquales.

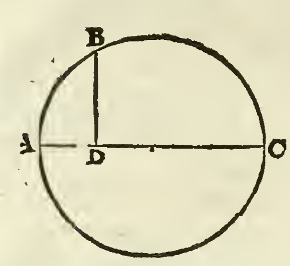


Geometræ autem, cùm magnitudinem aliquam ad quendam locum referre volunt, primùm magnitudinis istius genus ac speciem, deinde ejusdem conditiones exprimunt, ac tandem locum ipsum enuntiant, addito modo quo ipsa magnitudo ad prædictum locum refertur.

In exemplo ergo præmisso sic illi loquerentur. Si ab aliquo puncto educantur quotcunque rectæ, quæ uni eidemque rectæ sint æquales, erit alterum cujusvis eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

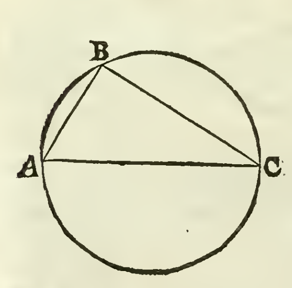
In altero exemplo. Esto quævis circumferentia cir-

culi ABC, cujus diameter ſit AC, atque in ea diametro ſtatuatur punctum quodvis D, à quo erecta ad diametrum perpendicularis recta DB, terminetur ad circumferentiam in B: erit ergo hæc BD media proportionalis inter diametri portiones AD, DC; unde ipſa circumferentia, rursùs alio reſpectu locus erit, quippe ad medias proportionales.



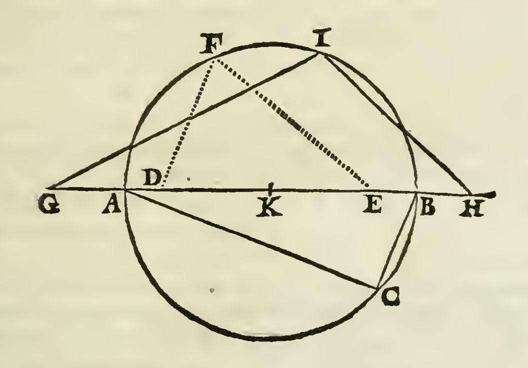
Phraſis Geometrica hujus loci talis eſſet. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, ſi inter terminos illius ſumatur quodvis punctum, à quo educatur ad rectos angulos ipſi rectæ quævis alia recta, quæ inter prioris rectæ portiones media proportionalis exiſtat, erit alterum eductæ extremum ad circuli circumferentiam.

In tertio exemplo. Eſto adhuc quævis circumferentia circuli ABC, atque in ea recta quædam AC quæ ſubtendat arcum ABC utcunque; atque in eo arcu, ſumpto quovis puncto B, ducantur rectæ BA, BC ad ejuſdem arcus ſive chordæ ipſius extrema: manifeſtum eſt angulum ABC æqualem eſſe omni alii angulo qui in eadem portione ABC exiſtet. Manifeſtum eſt quoque potuiſſe ſuper rectam AC conſtitui portionem circuli ABC, quæ cujuſcunque anguli ABC capax eſſet; unde circuli portio ABC hoc reſpectu locus erit; quippe ad angulos æquales.



Phrasis Geometrica hæc erit. Rectâ lineâ utcunque terminatâ, & exposito quovis angulo rectilineo : si à rectæ lineæ terminis ad aliquod punctum inclinentur duæ aliæ rectæ quæ angulum exposito æqualem contineant : erit hoc punctum, sive vertex anguli, ad alicujus portionis circuli circumferentiam.

In quarto exemplo. Esto ut suprà quivis circulus cujus diameter AB; atque ex punctis A, B, ducantur ad quodvis punctum C in circumferentia existens, rectæ AC, BC. Patet ergo ambo simul quadrata AC, BC



æqualia esse quadrato diametri AB, ac proinde ipsam circumferentiam locum esse ad summam duorum quadratorum uni eidemque quadrato semper æqualem.

Atque etiam si assumpta puncta non sint ipsa A, B, sed alia duo quæcunque in rectâ AB etiam productâ, si libuerit, modò ipsa puncta à centro K hinc inde æqualiter distent, vel intra circulum, qualia sunt D, E; vel extra, qualia sunt G, H; ducanturque ad quodvis circumferentiæ punctum F vel I rectæ DF, EF; vel rectæ

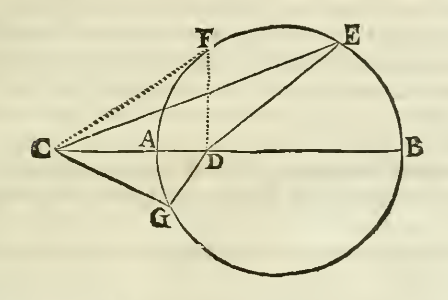
GI, HI; ſemper ambo quadrata DF, EF ſimul ſumpta uni eidemque ſpatio erunt æqualia, nempe ſummæ amborum quadratorum DB, BE, vel ſummæ amborum EA, AD: ſimiliter ambo quadrata GI, IH ſimul ſumpta, uni eidemque ſpatio æqualia erunt, nempe ſummæ amborum quadratorum GB, BH, vel ſummæ amborum HA, AG. Hinc ergo circumferentia illa, lato illo reſpectu, locus erit ad ſummam duorum quadratorum uni eidemque ſpatio ſemper æqualem.

Phraſis Geometrica. Rectâ lineâ quâcunque expoſitâ, ſignatiſque in ea utcumque duobus punctis, ſi ab ipſis punctis ad tertium quodpiam punctum duæ rectæ inclinentur, & ſint ſpecies quæ ab ipſis fiunt ſimul ſumptæ expoſito alicui ſpatio æquales, tertium illud punctum erit ad alicujus circuli circumferentiam.

Species dicunt Geometræ, non quadrata; ut indicent hoc univerſaliter verum eſſe, non de quadratis modò, ſed etiam de figuris ſimilibus, ſimiliterque ſuper rectis de quibus agitur deſcriptis. Quod enim de quadratis verum eſt, idem quoque de ejuſmodi figuris verum eſſe omnino conſtat. Immò, ſi aſſumpta puncta in ſuperiori quarto exemplo plura ſint quàm duo, ſive omnia in eadem recta exiſtant, ſive non, quicunque tandem ſit illorum numerus, & quæcunque poſitio; atque ab iiſdem punctis ad aliud quoddam punctum totidem rectæ ducantur, ſingulæ ſcilicet à ſingulis punctis, & omnium ipſarum rectarum ſpecies ſimul ſumptæ alicui ſpatio ſint æquales: erit illud aliud punctum ad circuli circumferentiam. Dabitur quippe circulus quiſpiam in cujus circumferentia ſumpto quovis puncto, atque ab eo ad omnia puncta primò poſita ductis totidem rectis, erunt harum omnium ductarum ſpecies ſimul ſumptæ eidem ſpatio æquales: quo quidem reſpectu circumferentia illa erit locus, qui omnium locorum planorum elegantiſ-

simus jure censeri possit; sed illius, sicuti & aliorum discussio specialior, ad specialem de locis tractatum pertinet, nos autem hîc ad generalem quandam locorum notionem attendimus.

In quinto exemplo. Esto item circulus, cujus diameter AB, quæ producatur versùs A extra circulum utcunque in C; & ducatur recta CF tangens circulum in F, à quo demittatur in diametrum perpendicularis FD. Itaque erit ut CA ad AD, ita CB ad BD. Jam in cir-



cumferentia sumatur quodvis punctum E, vel G &c. à quo rectæ ducantur EC, ED, vel GC, GD &c. erit sanè semper EC ad ED, vel GC ad GD, vel etiam FC ad FD &c. ut CA ad AD, vel ut CB ad BD; ut hoc respectu circumferentia AFEBG sit locus nobilissimus ad binas & binas rectas in eadem ratione existentes.

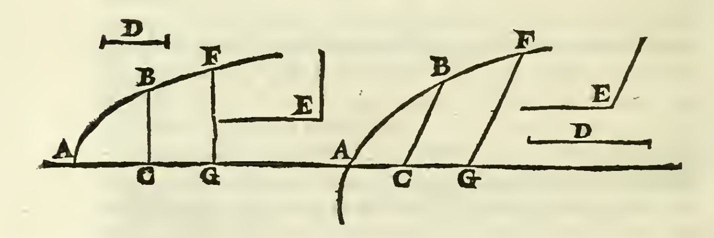
Phrasi Geometricâ. Si à duobus punctis C, D, ad idem aliud punctum E duæ rectæ inclinentur CE, DE, in data ratione inæqualitatis existentes: erit tertium illud punctum E ad cujusdam circuli circumferentiam.

Omninò, quot proprietates habet magnitudino aliqua, modò proprietates ipsæ magnitudini conveniant, non

autem punctis quibusdam tantùm numero definitis: tot modis ipsa magnitudo locus esse potest; ita ut si infinitæ numero sint tales proprietates ad aliquam magnitudinem pertinentes, etiam infinitis modis, talis magnitudo locus esse possit. Sed & uniuscujusque modi locus denominationem sortietur à proprietate illa, respectu cujus ipse locus est.

Sic, in quinque allatis exemplis, propter quinque nobilissimas circuli proprietates, quinque etiam modis circumferentia illius locus esse ostenditur. At cùm innumeræ aliæ sint ipsius circularis figuræ proprietates, quarum unaquæque in suo genere eximia est, sequitur ut innumeris etiam modis circumferentia circuli locus esse queat: at nos quid sit locus Geometricus indicare tantùm atque exemplis quibusdam illustrare decrevimus, non autem integrum eorum tractatum instaurare: itaque paucis aliis exemplis alterius generis locorum ad præcedentia additis, ad id quod propositum est accedemus.

In sexto ergo exemplo. Esto parabola AB, cujus dia-



meter sit AC, vertex A, atque ad diametrum ordinatim applicata sit quævis recta BC, & latus rectum ponatur esse D. Notum est ergo ex conicis, quadratum rectæ BC æquale esse rectangulo contento sub latere

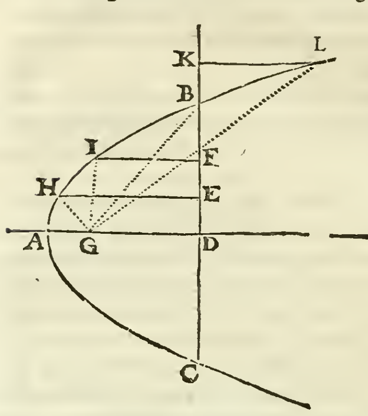
recto D, & ſub rectâ AC, quæ ex diametro inter verticem A & applicatam BC intercipitur, ſive diameter illa ſit axis, ſive alia quæcunque. Itaque ordinatim applicata BC, quæcunque illa, ſit media proportionalis eſt inter latus rectum D & portionem diametri AC. Ac proinde parabola quævis locus eſſe poteſt ad medias proportionales, quarum altera extremarum ſit ſemper eadem.

Phraſi Geometricâ. Rectâ lineâ quacunque expoſitâ AC quæ indefinita ſit, atque ſignato in ea quocunque puncto A; item aliâ rectâ quavis D, longitudine datâ, & dato angulo quocunque E, ſi in priori recta ſumatur quodcunque punctum C ad unas partes ipſius A, & educatur recta CB in angulo ACB qui æqualis ſit angulo E, & punctum B ſit ſemper ad unas partes rectæ AC, ipſa autem BC media ſit proportionalis inter expoſitam D & portionem AC: erit punctum B ad parabolam.

Quòd ſi plures ſint in eadem parabola ordinatim ad eandem diametrum applicatæ, putà BC, FG, inter quas à vertice A interceptæ ſint portiones diametri AC, AG: erunt hæ portiones AC, AG, inter ſe longitudine, ut applicatæ potentiâ; hoc eſt, erit quadratum BC ad quadratum FG ut recta AC ad rectam AG; quo pacto parabola erit locus ad quadrata rectis lineis proportionalia, quod ſatis ex dictis patet.

In ſeptimo exemplo. Eſto rurſus parabola BAC, cujus diameter AD, atque ad ipſam diametrum ordinatim applicata ſit recta BDC; ſumpto autem in ipſa parabola quovis puncto H, ducatur recta HE parallela diametro AD, occurrens ipſi BC in puncto E. Erit ergo ut recta AD ad rectam HE, ita rectangulum BDC ad rectangulum BEC. Similiter, ſumpto in eadem parabola alio quovis puncto I, & ductâ rectâ IF parallelâ ipſi AD vel HE, erit quoque recta AD ad rectam IF,

ut rectangulum BDC ad rectangulum BFC, & recta HE ad rectam IF erit ut rectangulum BEC ad rectangulum BFC: atque ita de reliquis similiter ductis. Unde parabola erit locus ad rectas lineas rectangulis proportionales.



Phrasi Geometricâ. Si expositâ quacunque rectâ BC, sumptisque in ea quotcunque punctis DEF &c. educantur ad easdem partes ipsius rectæ BC aliæ rectæ totidem terminatæ DA, EH, FI &c. atque omnes inter se parallelæ, sintque rationes eductarum eædem cum rationibus rectangulorum quæ sub portionibus rectæ primò expositæ continentur, quæ quidem portiones sumantur à singulis punctis eductarum usque ad extrema B, C, prout singula puncta singulis eductis respondent: erunt reliqua eductarum puncta extrema A, H, I, &c. ad parabolam.

Quòd si recta BC ordinatim applicata producatur in directum extra parabolam ex quacunque parte versùs B vel C quantùm quisquis voluerit usque in K, & ducatur recta KL prædictis AD, HE, IF, &c. parallela, quæ parabolæ etiam productæ occurrat in L, sed ad alteras partes ipsarum AD, HE, IF, &c. tunc quoque erit recta AD ad rectam KL ut rectangulum BDC ad rectangulum BKC, atque ita de reliquis.

Nec

Nec ideo phrasis Geometrica à præcedenti diversa est, nisi in eo tantùm quod rectæ KL, AD, sunt ad diversas partes ipsius BC; quandoquidem sic exigit loci natura.

Neque etiam refert an rectæ AD, HE, IF, KL, &c. sint perpendiculares ipsi BC, vel ad illam obliquæ; hoc enim vel illo modo semper verum erit quod proponitur.

In octavo exemplo. In alterutra figurarum præcedentium ponatur recta AD esse axis parabolæ, ad quam ideo perpendicularis sit ordinatim applicata BC, existentibus angulis ADB, ADC rectis; sitque in axe AD producto, si opus sit, focus G, à quo ad puncta H, I, B, L, &c. quæcunque in parabola existunt, ducantur totidem rectæ GH, GI, GB, GL, & reflectantur aliæ rectæ HE, IF, LK ad quamvis ordinatim applicatam BC quantùm satis productam, perpendiculares: tunc verò (eximia sanè parabolæ proprietas) quævis ducta GH cum sua reflexa HE, æqualis erit cuivis alii ductæ GI cum sua reflexa IF &c. Siquidem reflexæ ipsæ respectu ipsius BC, omnes sint ad partes verticis A, & summa cujusvis talis ductæ cum sua reflexa, putà summa GHE, æqualis erit summæ ambarum GAD, sive uni rectæ GB quæ sola ducta est, cui nulla convenit reflexa respectu ordinatæ BC. Quòd si ductæ quædam, ut GL &c. suas reflexas LK &c. habeant ad alteras partes verticis A respectu ordinatæ BC: tunc differentia inter ductam GL & reflexam LK æqualis est eidem GB. Erit ergo parabola locus ad quotcunque rectas ab eodem puncto ductas, atque à parabola ad eandem aliquam aliam rectam perpendiculariter reflexas, ita ut summa vel differentia cujusvis ductæ & suæ reflexæ æqualis sit alicui datæ rectæ lineæ.

Phrasi Geometricâ. Expositâ quâcunque rectâ lineâ indeterminatâ BC, signatisque in ea duobus punctis B,

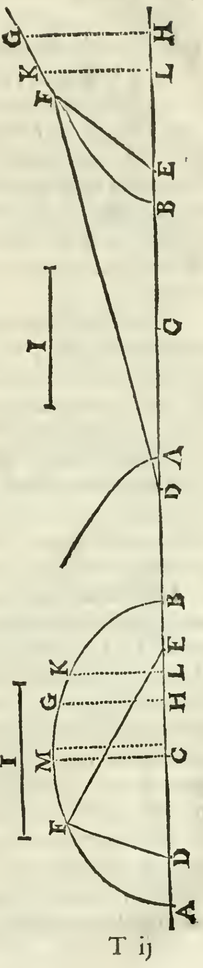
C, atque ad eandem erectâ perpendiculari rectâ quâdam longitudine datâ AD, existente puncto D in ipsa BC; sumpto etiam quocunque puncto G in eadem AD: si ductâ quâcunque rectâ GH ad partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum E inter puncta B, C, summa ambarum GHE æqualis sit datæ alicui rectæ: vel si ductâ quâcunque rectâ GL ad alteras partes puncti A, eâdemque reflexâ perpendiculariter ad rectam BC in punctum K ultra puncta B, C, differentia ambarum GL, LK, æqualis sit datæ alicui rectæ, ei scilicet cui summa GHE æqualis est: punctum reflexionis H, vel L, erit ad parabolam cujus ipsum punctum G erit focus; recta AD, axis; & recta AG erit quarta pars lateris recti.

Talis verò locus parabolicus ad specula ustoria pertinet. Nam si assumatur pars concava BAC, & radii solis sint rectæ, FI, EH, &c. qui ad sensum sunt paralleli; illi ad puncta I, H, &c. reflectentur à forma parabolica, & reflexi concurrent ad focum G; ubi si speculum sit satis amplum, & sol in debita dispositione, intensissimus calor excitabitur. Hoc autem ideò fit, quia si per puctum I duceretur recta parabolam tangens, tunc rectæ FI, GI, ad ipsam tangentem angulos æquales constituerent: eorum autem angulorum alter esset angulus incidentiæ alter autem angulus reflexionis, atque ita de reliquis ad alia puncta H, &c. pertinentibus.

Quod si candela in puncto G constitueretur, ejus radii GH, GI, &c. post reflexionem à speculo fierent paralleli, putà HE, IF, &c. atque ita lumen candelæ longissimè produceretur; sed hæc sunt alterius loci.

Nono exemplo. Esto ellipsis vel hyperbola, cujus axis sit AB, centrum C, vertices autem sint A & B, & foci D, E, quorum D propior sit vertici A, at E sit propior vertici B; atque in sectione sumatur quodvis punctum

F, à quo ad focos ducantur rectæ DF, FE. Patet ergo ex conicis, in ellipsi summam ambarum DFE, in hyperbola autem, differentiam ipsarum DF, FE, axi AB æqualem esse. Unde hoc pacto illipsis locus erit ad summam, hyperbola autem ad differentiam duarum rectarum à duobus certis punctis procedentium & ad idem tertium aliud quodpiam punctum inclinatarum.



Phrasis Geometrica, ad imitationem præmissarum facilis est.

Decimo exemplo. In iisdem sectionibus noni exempli, esto I recta latus rectum suæ sectionis, & recta AB sit quæcunque diameter cui conveniat tale latus rectum, sive ipsa diameter sit axis, sive non, atque ad ipsam diametrum sint ordinatim applicatæ quotcunque rectæ GH, KL, &c. quarum puncta K, G sint in sectione: puncta autem L, H sint in diametro AB quæ in hyperbola producta sit indefinitè. Ergo ex conicis, rectangulum ALB est ad quadratumLK, ut diameter AB ad latus rectum I; item rectangulum ALB est ad rectangulum AHB, ut quadratum LK ad quadratum HG: unde utraque sectio ad utramque talem proprietatem locus est.

Nec phrasis Geometrica difficilis est, modò quis ea quæ superiùs exposita sunt imitari voluerit.

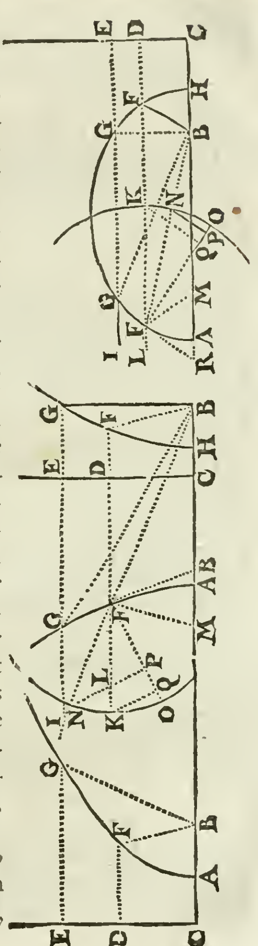
Si AB sit axis, sitque ipsi æquale latus rectum I, vel rectangula ad quadrata sint in ratione æqualitatis: tunc loco ellipsis habebimus circulum, ut in secundo exemplo. At non mutabitur hyperbola, nisi specie tantùm, illa enim in genere semper erit hyperbola; sed hoc casu æqualitatis, assymptoti illius erunt inter se ad angulos rectos, cùm in ratione inæqualitatis illæ assymptoti sint ad angulos obliquos; sed hæc omnia ex conicis manifesta sunt.

Undecimo exemplo. Esto quæcunque sectio conica, cujus axis AB, vertex A & focus B; atque producto utrinque axe, sumatur in eo ultra verticem punctum C, ita ut, in parabola quidem, recta AB æqualis sit rectæ AC, in hyperbola verò ipsa AB major sit quàm AC, in ea scilicet ratione quam habet distantia focorum ad longitudinem axis inter vertices sectionum oppositarum intercepti; at in ellipsi, AB minor sit quàm AC, in ea rursùs ratione quam habet distantia focorum ad axem ellipsis inter vertices interceptum.

Hæc autem utraque ratio est ea quam in figuris noni exempli habet recta DE ad rectam AB; tum ex C excitetur CD perpendiculariter ad CB, eademque CD indefinitè utrinque producatur. His positis, sumantur in sectione quotcunque puncta F, G, &c. à quibus ducantur totidem rectæ DF, EG, &c. ipsi BC parallelæ quæ occurrant rectæ CD in punctis D, E, &c. ac tandem jungantur rectæ BF, BG, &c. ac tunc erit ut BA ad AC, ita BF ad FD, vel BG ad GE, atque ita de reliquis: unde quævis trium illarum sectionum locus est ad pulcherrimam illam proprietatem.

Phrasi Geometrica. Expositis duabus rectis CB, CD ad angulum rectum constitutis, signato in altera illa-

rum unico puncto B, quod à puncto C diversum sit, in altera verò sumantur quorcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ sint rectæ FD, GE, &c. ipsi CB parallelæ, quæ in punctis F, G, &c. inclinentur ad punctum B, & sint rationes BF ad DF, BG ad EG, &c. omnes inter se eædem: puncta F, G, &c. erunt omnia in una eademque sectione conica, cujus punctum B focus erit.



Hujus propositionis, in parabola quidem, unicus est casus, quia in ea unicus est focus, & vertex unicus; at in hyperbola atquè in ellipsi, quia in utraque duplex est focus, B, M, & vertex duplex A, H: ideò in unaquaque ex illis sectionibus, quadruplex est casus, duo quidem respectu unius focorum propter duplicem verticem, & duo respectu alterius focorum propter eundem duplicem verticem. At quoniam id quod de uno ex istis focis verum est, verum quoque est de altero similiter considerato; ideò ad explicandos istos casus sufficiet, si unum focorum, putà B, assumpserimus.

Ille ergo focus B necessariò propior est uni verticum quàm alteri. Esto vertex propior H,

remotior autem esto A. Itaque, sive puncta F, G, &c. sint prope verticem remotiorem A, sive eadem puncta F, G sint prope verticem propiorem H, semper vera est propositio, nempe BF rectam esse ad rectam FD sibi conterminam ad punctum F, ut recta BG ad rectam GE sibi conterminam ad punctum G. Hinc verò quædam deduci possunt consequentiæ quæ apud Apollonium in suis conicis non reperiuntur, nec tamen forsan illis cedunt quas ipse habet ibidem, qualis est hæc. In hyperbola, summa ambarum BF, BF, suprà diversos vertices A, H tendentium, & ad eandem rectam FF axi AH parallelam pertinentium, se habet ad ipsam FF, ut recta BM, quam distantiam focorum esse supponimus, ad axem AH. In ellipsi, differentia earumdem BF, BF, ad eandem FF, se habet ut distantia focorum BM ad axem AH; ac proinde in hyperbola, summa ipsarum BF, BF est ad summam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG. In ellipsi, differentia ipsarum BF, BF est ad differentiam BG, BG, ut recta FF ad rectam GG; atque ita de multis aliis quas consultò omittimus, quia id tantùm, quid sit locus geometricus, declarare, atque exemplis quibusdam illustrare intendimus.

Illud tamen minimè prætereundum putamus quod ad Dioptricam pertinet, nec ita pridem innotuit, nempe talem proprietatem sumptam in ratione inæqualitatis, ad refractiones pertinere, atque illis esse specificam, ad hoc ut radii omnes qui ante refractionem erant ejusdem ordinis (hoc est vel paralleli, vel ad idem punctum inclinati, sive illi ad ipsum punctum tendant, sive ab eo divergant) iidem post refractionem fiant adhuc ejusdem ordinis, qui tamen ordo diversus sit à priori. Et convertendo. Si superficies quædam refractiva talis sit, ut qui ante refractionem ejusdem ordinis erant radii, iidem post refractionem sint adhuc ejusdem ordinis, sed ab

ordine priori diversi : fiet necessariò ut tali superficiei talis conveniat proprietas, quam in hoc undecimo exemplo sectionibus conicis convenire diximus, in ratione tamen inæqualitatis.

Hîc verò in universum tres sunt casus. Primus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem fiunt adhuc paralleli, sed diverso à priori parallelismo; qui quidem casus ad sola refractiva plana pertinet, nec admodum utilis est. Secundus casus est, cùm radii qui ante refractionem erant paralleli, post refractionem ad idem punctum inclinantur; vel contrà, qui ante refractionem ad idem punctum inclinabantur, pòst fiunt paralleli; qui casus ad ellipsim pertinet atque ad hyperbolam, quibus proprietas illa convenit in ratione inæqualitatis, non autem ad parabolam, cui ipsa convenit in ratione æqualitatis. Tertius casus est, cùm radii qui ante refractionem ad unum punctum inclinabantur, post refractionem ad unum aliud punctum inclinantur; qui casus aliquando ad superficiem sphericam pertinet, sed in aliquo tantùm casu admodùm particulari, aliàs enim ac multò magis universaliter, ipse pertinet ad alias superficies de quibus in exemplo sequenti dicturi sumus.

Quomodò autem secundus casus ad ellipsim pertineat vel ad hyperbolam, aut, quod universalius est, ad superficiem spheroïdis vel conoïdis hyperbolici, quæ superficies ab ipsis ellipsi vel hyperbolâ circa suos axes conversis gignuntur : non inutile erit hoc loco declarare. Posthàc enim, sequenti exemplo, quomodò tertius casus ad alias superficies pertineat, aperiemus.

In figura ellipsis vel hyperbolæ undecimi hujus exempli, sumpto in sectione quovis puncto F, quâ parte illa sectio magis distat à foco B, eademque vertici A propior est, & factâ constructione ut ibidem; producatur recta

DF ad partes F utcunque in L, tum circa axem AH intelligatur circunvolura ſectio, ut habeatur ſphæroïdes, vel conoïdes hyperbolicum, ad cujus formam perficiatur preſpicillum vitreum vel cryſtallinum, vel ex aliqua ejuſmodi materia quæ aëre denſior ſit, & radios ab ipſo aëre in eandem obliquè incidentes refringat; & ratio inter aërem & talem materiam, quòd ad rarefractionem & condenſationem ſpectat; ſive, ut vulgò jam loquimur, ratio refractionis inter aërem & ipſam materiam, eadem ſit ei rationi quæ eſt inter rectas BA, AC; ſive inter rectas AH, BM, conferendo ſemper majorem terminum rationis ad minorem, dum confertur corpus rarius ad denſius: (quid ſit autem ratio refractionis inter duo corpora diverſæ denſitatis, jamjam explicabimus:) dico quod in tali perſpicillo, ſi radius incidentiæ ſit LF, qui axi AH parallelus eſt, idemque progrediatur ab L ad F, frangetur radius ille in F, & fractus inclinabitur ad punctum B. Quòd ſi radius incidentiæ ſit BF progrediens à puncto B, ille frangetur in F, & poſt fractionem fiet radius FL axi HA parallelus. Nam in refractione, ſicuti & in reflexione, progreſſus cujuſvis radii, & regreſſus ejuſdem, fiunt per eaſdem lineas: atque omninò quævis ſpecies viſibilis eundo & redeundo idem ſervat iter.

Quoniam ergo ponimus ſuperficiem ſphæroïdis vel conoïdis hyperbolici, exhibere nobis perſpicillum ipſum à quo radii refringuntur in ingreſſu vel in egreſſu ejuſdem ſuperficiei; & ſuperficies illa duplici modo accipi poteſt, primo quidem prout convexa eſt, ita ut convexitas pertineat ad corpus denſius; ſecundo prout concava eſt, ita ut cavitas pertineat ad idem corpus denſius: ſciendum eſt nos de priori modo jam locutos eſſe; quòd ſi de ſecundo modo loquamur, contrarium accidet: nam ſi radius incidentiæ ſit FF axi parallelus, atque

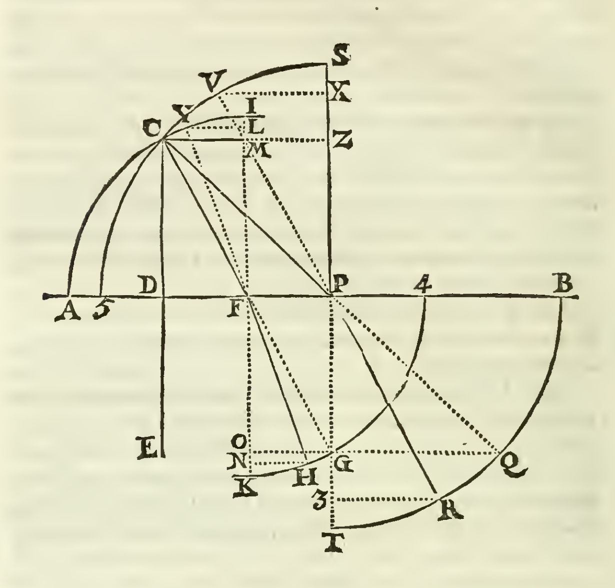
que ipſe radius à parte foci remotioris B incidat in ſectionem cujus vertex eſt A, is poſt refractionem in puncto F, fiet radius FI qui diverget tanquam ſi ab ipſo foco remotiore B profectus ſit, eritque in directum cum recta linea BF. Si autem radius incidentiæ ſit IF, qui ad focum B inclinatur, is poſt refractionem fiet FF axi parallelus.

In his duobus modis manifeſtum eſt ſphæroïdem à conoïde hyperbolico in eo differre, quòd priori modo radius LF in conoïde ſit intra denſum corpus, & FB intra rarum; in ſphæroïde autem, LF ſit intra rarum & FB intra denſum: at ſecundo modo, è contrario in conoïde radius LF ſit in raro, & FB in denſo; in ſphæroïde autem, LF ſit in denſo, & FB in raro.

Jam quid ſit ratio refractionis inter duo corpora diaphana diverſæ denſitatis, putà inter aërem & vitrum, ſic explicabimus.

Eſto AB ſuperficies communis duorum corporum propoſitorum; ſitque rarius, putà aër versùs partem ſuperiorem C; denſius autem, putà vitrum, ſit versùs partem inferiorem E: & ſumpto in rariori, quovis puncto C, progrediantur ab eo quotcunque radii CD, CF, CP &c. cadentes in ſuperficiem AB in punctis D, F, P, &c. per quæ ingrediantur in vitrum: ex iis autem radiis, CD perpendicularis ſit ad illam ſuperficiem; cæteri autem obliqui, ita ut CF minùs obliquus ſit quàm CP. Omnes ergo, præter CD frangentur in ingreſſu vitri; at CD ſolus rectà ſine fractione tranſibit ad E. Jam cujuſvis aliorum, putà ipſius CF, fractio ſic ſe habebit. Centro F & intervallo FC deſcribantur duo circuli quadrantes ACI quidem intra aërem, KG4 autem intra vitrum, ita ut recta IFK ſit diameter ad ſuperficiem AB perpendicularis, & quadrantes habeant angulos AFI, KF4 rectos, ad verticem oppoſitos; quo pacto illi jacebunt in eodem

plano, eruntque sibi invicem oppositi. Producatur in directum recta CF intra vitrum usque ad circumferentiam quadrantis in G.



Si igitur radius CF fractus non esset in F, ille rectà progrederetur in G; at propter fractionem fit contrà, ut deviet ab ipsa rectitudine CFG, fiatque CFH ex duabus rectis CF, FH angulum obtusum ad F constituentibus, sic ut intra aërem angulus inclinationis CFI major sit quàm angulus HFK qui est quoque angulus inclinationis intra vitrum; hîc enim inclinationem radiorum mensuramus per angulos quos illi faciunt cum perpendiculari erecta à puncto incidentiæ, & hi anguli respe-

ctu ejusdem radii fracti, majores sunt intra rarum quàm intra densum.

Præterea producatur in directum recta HF ultra centrum F usque ad circumferentiam in Y; atque à quatuor punctis C, Y, G, H in circumferentia existentibus, cadant in rectam IFK totidem pendiculares CM, YL, GO, HN, ex quibus duæ majores CM, GO inter se æquales erunt, sicuti & duæ minores YL, HN inter se. Ratio ergo quam habet utravis majorum ad utramvis minorum, ea est quam vocamus rationem refractionis ab aëre ad vitrum, putà ratio CM ad HN vel ad YL; & convertendo, ratio minoris ad majorem, putà HN ad CM vel ad GO, vocabitur ratio refractionis à vitro ad aërem; ac universaliter major ratio vocatur ratio refractionis à rariori ad densius; minor autem, ratio refractionis à densiori ad rarius.

Et hæc quidem ratio respectu duorum eorumdem corporum nunquam mutatur, sed eadem semper manet per omnes radiorum insuperficiem communem incidentium inclinationes, ut constanti experientiâ comprobatur: neque enim hoc, cùm à corporum natura pendeat, aliter haberi potuit quàm ab experientia, ex qua tale Dioptricæ fundamentum longè præcipuum atque nobilissimum depromptum est.

Sed esto in eandem superficiem AB alius radius CP priori CF obliquior; ac centro P, intervallo PC describantur ut priùs duo circuli quadrantes 5CS, TQB prior in aëre, posterior in vitro, ambo ad verticem oppositi, atque in eodem plano jacentes, & communem diametrum habentes rectam SPT quæ ad planum AB perpendicularis existat; hic autem radius CP frangatur in P, & post fractionem abeat in R, ita ut angulus inclinationis CPS intra rarum major sit angulo inclinationis RPT intra densum; producatur quoque CP in di-

rectum in Q, & RP producatur in directum in V, ſintque puncta 5, C, V, S, T, R, Q, B in eadem circuli circumferentia, in cujus diametrum SPT cadant quatuor perpendiculares CZ, QG, R3, VX, quarum duæ majores CZ, QG ſunt inter ſe æquales, ſicuti & duæ minores R3, VX inter ſe. Rursùs ergo, ratio cujuſvis majoris ex quatuor illis perpendicularibus ad quamvis minorem, putà ratio CZ ad R3 vel ad VX, eſt ratio refractionis à raro ad denſum; & ratio cujuſvis minoris ad quamvis majorem, eſt ratio refractionis à denſo ad rarum, putà R3 ad CZ vel ad QG; & hæ rationes eædem ſunt cum præcedentibus CM ad HN, vel HN ad CM, &c.

Vide figuras præcedentes pag. 149.

Tale autem fundamentum refractionis ad prædictas ſectiones ellipſim & hyperbolam ſic accommodatur. Sumpto in quavis illarum ſectionum puncto F, & factâ conſtructione omninò ut ſuprà, ac poſito quòd ſectionis ſpecies talis ſit ut ratio axis AH ad diſtantiam focorum BM, ſit ratio refractionis à raro ad denſum in ellipſi, & à denſo ad rarum in hyperbola, inter duo corpora propoſita aërem & vitrum; ducatur recta FR quæ ſectionem tangat in F; tum recta FO ipſi tangenti perpendicularis, atque adeo perpendicularis quoque ipſi ſectioni, quæ quidem FO utrinque producatur indefinitè, ſed hoc loco ſpeciatim, ad partes concavas ſectionum; deinde centro F & intervallo quocunque FO, deſcribatur circuli quadrans cujus arcus ſecet rectam FL in K, & rectam BF in N; & à punctis K,N in rectam FO deducantur perpendiculares KQ, NP: demonſtrabitur ex natura conicorum, harum perpendicularium KQ, NP rationem eandem eſſe cum ratione axis AH ad diſtantiam focorum BM, ac proinde eſſe rationem refractionis inter duo corpora propoſita aërem & vitrum. Poſito ergo quòd LF in ellipſi, in hyperbola autem KF ſit radius incidentiæ, erit FB radius refractionis; & contrà, ſi BF ſit

radius incidentiæ, erit LF in ellipsi, & KF in hyperbola, radius refractionis.

Cætera quæ plurima sunt, minutatim persequi, Dioptricæ sunt partes; nobis verò qui de locis agimus hoc ostendendum restat, cur tale argumentum, quod manifestò ad Dioptricam pertinet, hoc loco attigerimus.

Id ergo ostendere voluimus, non solùm in rebus purè geometricis locorum geometricorum vim cerni posse, sed etiam in aliis Matheseos partibus quæ objectum suum à Physica mutuantur, modò talis objecti actiones per lineas geometricas producantur: quod sanè radiis specierum visibilium accidere satis superque notum est. Idem autem in Mechanica locum facilè habere ostenderetur; atque etiam in Astronomia: sed istam segetem, quia ad hanc materiam directè non spectat, alio tempore metendam relinquamus.

Porrò, si quis phrasi dioptricâ uti voluerit in enuntiando ejusmodi loco dioptrico, is hoc modo loqui poterit.

Si perspicilli alicujus superficies, radios omnes parallelos in eam incidentes sic refringat, ut ad idem punctum inclinentur: vel si omnes radios ad idem punctum inclinatos, parallelos efficiat, talis superficies erit superficies sphæroïdis, vel conoïdis hyperbolici, & punctum inclinationis erit focus ab ipsa superficie remotior, qui autem paralleli erunt radii, iidem & axi ipsius superficiei erunt paralleli, sed & axis ipse inter vertices interceptus, ad distantiam focorum eam rationem habebit quæ est ratio refractionis inter corpus ex quo fit illud perspicillum, & medium diaphanum per quod transeuntes radii in tale perspicillum incurrunt.

Duodecimo exemplo. Ostendamus quomodò tertius ille casus de quo undecimo exemplo locuti sumus, & quem hûc remisimus, aliquando ad superficiem sphæ-

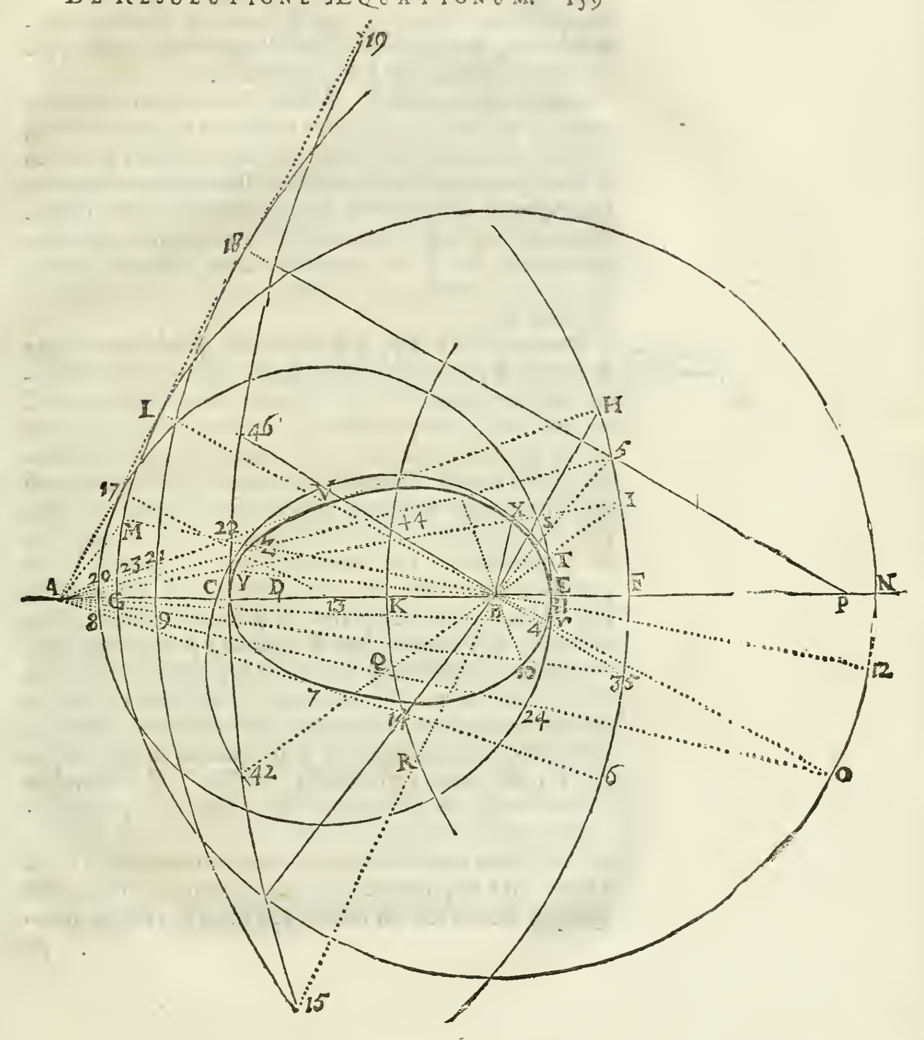
ricam, ſed multò magis univerſaliter ad alias ſuperficies pertineat, quas antiquis notas fuiſſe nullibi apparet.

Sunto ergo in figuris ſequentibus, duo puncta AB; & quæratur perſpicillum quod radios ad punctum A inclinatos ſic refringat, ut poſt refractionem iidem ad punctum B inclinentur. Et quidem jam monuimus perinde eſſe, ſive radii ad punctum A convergant, ſive ipſi radii à puncto A divergant, utroque enim modo, eoſdem dici ad punctum A inclinari: quod idem de quocunque alio puncto B &c. intelligi debet, ne quis circa ea quæ dicta ſunt, vel quæ dicenda ſunt, hærere poſſit.

Hinc ergo quadruplex caſus particularis oriri poteſt. Vel enim radii ab uno punctorum A, B, divergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt fractionem iidem ad alterum convergant; vel radii ab uno punctorum A, B divergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero divergant: vel radii ad unum punctorum A, B, convergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero convergant; vel denique radii ad unum punctorum A, B convergentes, ſic refringendi ſunt, ut poſt refractionem ab altero divergant.

Et quidem omnes illi quatuor caſus differunt inter ſe perſpicillis duplici modo inter ſe diverſis. Priori modo, cùm perſpicilla ipſa diverſi ſunt generis, quod ad formam ſive figuram ſpectat: quemadmodum diverſi ſunt generis ſphæroïdes, & conoïdes de quibus undecimo exemplo egimus. Poſteriori modo, cùm talia perſpicilla differunt tantùm ſecundùm convexum & concavum, prout ſcilicet hoc vel illud ad corpus denſius pertinet, vel ad rarius.

Verùm, in univerſum, eorum omnium conſtructio non multò magis diverſa eſt quàm conſtructio ellipſis à conſtructione hyperbolæ, quam ſuprà initio undecimi exempli oſtendimus differre tantùm ſecundùm rationem majoris inæqualitatis, & rationem minoris


19
18
L
H
46
5
17
V
X
S
I
M
22
44
Z
T
A
20
23
21
C
Y
D
E
F
N
G
13
K
B
P
8
9
4
Q
10
35
12
7
14
24
R
42
6
O
15

inæqualitatis. Dicamus ergo breviter de ejusmodi constructione, ut appareat ipsam ad quosdam eosque pulcherrimos geometriæ locos pertinere.

Sunto ergo puncta A, B data, oporteatque in plano figuram describere, quâ circa rectam AB circumvolutâ, gignatur forma ad perspicillum apta, ita ut radii à puncto A divergentes, quotquot in perspicillum ipsum inciderint, refringantur ad punctum B. Ex duobus autem mediis diaphanis per quæ radii sive species transibunt, alterum, idemque rarius sit aër; alterum autem, idemque densius est vitrum, atque inter illa duo corpora ratio refractionis data sit.

Vide Figur. præced. p. 159.

Ducatur recta AB, quæ indefinitè producatur ultra B versùs E (ad alteras enim partes versùs A inutile fuerit) ac inter puncta A, B, sumatur quodvis punctum C in recta AB, quod punctum C futurum sit vertex figuræ planæ quæsitæ, quæ ad ovalem formam apprimè accedet, caret tamen adhuc speciali nomine, propterea quòd ipsa geometris hujusque ignota fuisse apparet. Nec multùm refert an vertex ille C puncto A, an verò puncto B propior sit; hoc enim liberum est, quamquam ad praxim utilior futurus sit, si ad punctum A magis accedat. Posito autem hoc primo ac præcipuo vertice C ex arbitrio, jam vertex alter E à puncto A remotior erit, immò ultra punctum B in recta AB producta; neque ex arbitrio pendebit illud punctum E, sed illius positio ex prædeterminatis sic habebitur. Fiat ut summa terminorum (id est antecedentis & consequentis simul) eorum inter quos ratio refractionis consistit, ad eorumdem differentiam, ita recta CB ad BE, & habebitur secundus vertex quæsitus F; fietque, ut si ex CB secetur CD æqualis ipsi BE, tum recta CE quæ axis erit futuræ ovalis, sit ad rectam BD in ratione refractionis à raro ad densum; fiat quoque BE ad EF in eadem sed inversa ratione nempe

pe ut BD ad CE; & ut CE ad BD, ita AF ad BG; sed punctum F sit in recta AE producta ultra E, punctum autem G è contrario sit propè A. Tum centro A intervallo AF describatur circulus FH, (sufficiet aliqua hujus circuli portio) & centro B intervallo BG alius circulus integer GMLNO, quem tangat recta AL in puncto L, à quo ducatur diameter LBO quæ angulum ALB rectum constituet; ducatur quoque recta BH ipsi AL parallela, sive ad LB perpendicularis, ita ut anguli recti ALB, LBH sint alternatim oppositi, & recta BH occurat circumferentiæ FH in puncto H, & jungatur recta AH secans BL in puncto V hæc AH determinabit portionem circuli FH quæ ad propositum nostrum utilis erit, sed & eadem AH tanget ovalem describendam in puncto V, & ratio BV ad VH erit ratio refractionis ut BE ad EF, sicuti & LV ad VA. Jam constructio ovalis per puncta talis erit.

Sumpto in arcu FH quocunque puncto I, ducatur recta AI, in qua tale reperiatur punctum X, ut ductâ rectâ BX, ratio hujus BX ad XI sit ratio refractionis ut BE ad EF, sive ut BV ad VH; sic enim punctum X erit in ipsa ovali. Et quia in eadem recta AI aliud reperiri potest punctum Y, ad quod si ducatur recta BY, erit quoque BY ad YI in eadem ratione refractionis: tale punctum Y ad eandem ovalem adhuc pertinebit. Quoniam autem recta AI ducta est utcunque, si multæ ducantur eodem modo ad quotlibet puncta in arcu FH assumpta, habebuntur simili constructione in singulis ex illis rectis, duo puncta ad ovalem pertinentia. Inventis ergo hac ratione quotcunque punctis per quæ ipsa ovalis transire debet, describetur illa ut describi solent multæ lineæ curvæ per quotlibet puncta inventa per quæ linea illa transire debet.

Porrò, ex tali constructione methodus non inelegans

deduci poteſt quâ ipſa ovalis motu aliquo continuo deſcriberetur, nec machina ad talem deſcriptionem requiſita, quamquam ſatis compoſita, admodum difficilis eſſet, nec unico modo perficeretur, immò forſan innumeris: at verò hæc ad organicam potius pertinent, nos autem de locis geometricis hîc agimus.

Patet ergo talem ovalem locum eſſe ad rectas in ratione data exiſtentes; ſiquidem BE ad EF, BX ad XI, BY ad YI, BV ad VH, &c. ſunt ſemper in eadem ratione, nempe in ratione refractionis à denſo ad rarum.

At phraſi geometricâ ſic loquemur. Expoſitâ quâcunque rectâ AB indefinitâ, ſignatiſque in ea duobus punctis A, B, ac deſcripto centro A & intervallo AF majori quàm AB, circulo FIH, ductâque ad ejus circumferentiam quâcunque rectâ AI quæ ſic ſecetur in X, ut ratio rectæ BX ad XI data ſit, ſed minoris inæqualitatis, erit punctum X ad lineam quampiam alicujus generis, quod nec ad rectas nec ad conicas pertinet, & tamen ad Dioptricam utile eſſe poterit.

Quomodò autem, & quando ejuſmodi ovalis Dioptricæ inſerviet, ſic declarabimus. Ad hoc ſanè duæ conditiones præcipuæ requiruntur. Prima eſt, ut ratio data BX ad XI ſit ratio refractionis à denſo ad rarum inter duo corpora diaphana per quæ radius opticus ſive ſpecies viſibilis tranſire debet. Secunda, ut datis duobus punctis A, B, ſemidiameter AF non ſit cujuſcunque longitudinis, ſed illa major quidem ſit quàm AB, at minor quàm ea recta ad quam AB habet rationem refractionis à denſo ad rarum, ſequàm BE ad EF; ut ſic poſtquàm factum fuerit ut FE ad EB, ita FA ad BG, ipſa BG minor ſit quàm AB; nam his conditionibus aut altera earum deficientibus, deſcriberetur quidem aliqua linea curva, ſed quæ ad Dioptricam inutilis eſſet: cùm autem aderunt illæ conditiones, tunc uſus illius in Dioptrica talis erit.

Duæ quidem ſunt partes ejuſmodi curvæ. Prior ac præcipua eſt ea que exiſtit circa verticem C uſque ad duo puncta contactus V, 7; poſterior eſt reliqua circa alterum verticem E uſque ad eoſdem contactus: ſed hæc poſterior pars inutilis eſt, prior verò facit ut exiſtente corpore denſo diaphano ab ipſa ovali comprehenſo, atque ad formam illius perpolito, putà vitro cui alterum corpus rarius undique contiguum ſit, putà aër qui vitrum ambiat; radii omnes à puncto A procedentes, atque in ſuperficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in punctum B; atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem ſuperficiem VC7 incidentes refringantur præcisè in A: quâ ratione primo caſui particulari ex quatuor præmiſſis factum eſt ſatis. Sic, ſi radius incidentiæ in raro ſit AY, radius refractionis in denſo erit YB; atque è contrario, ſi radius incidentiæ in denſo ſit BY, erit radius refractionis in raro YA.

Quòd ſi corpora permutentur, ut rarius ſive aër contineatur ſub forma ovali propoſita, denſiore ſive vitro ipſum coarctante: tunc radii omnes qui intra denſum dirigebantur versùs punctum B, incidu ntque in ſuperficiem VC7, ſic refringuntur, ut intra rarum divergant, tanquam ſi à puncto A progrediantur. Atque è contrario, radii omnes qui intra rarum ad punctum A convergebant incidu ntque in eandem ſuperficiem, ſic refringuntur intra denſum, ut divergant tamquam ſi à puncto B progrediantur. Sic radio incidentiæ exiſtente LV, MZ, fiet radius refractionis VH, Z5; & è contrario, exiſtente radio incidentiæ HV, 5Z, fiet radius refractionis VL, ZM; hoc autem pacto ſatisfecimus quarto ex quatuor caſibus particularibus.

Alio modo, nec minus eleganti, deſcribi poteſt ejuſmodi ovalis per puncta, beneficio circuli GMLNO ſu-

periùs descripti. Ducatur enim ab ejus centro B ad illius circumferentiam ex utraque parte, quæcunque diameter LBO, in qua producta, si opus sit, inveniatur tale punctum V, ut ducta recta AV sit ad VL in ratione refractionis, sed à raro ad densum; (in priori constructione, BX ad XI habebat eandem rationem, sed inversam, quippe à denso ad rarum) sic enim rursùs punctum V erit ad eandem ovalem. Simili modo, si in eadem diametro LBO productâ si opus fit, inveniatur punctum aliud 4, ita ut ducta recta A 4 sit ad 4 O in eadem ratione refractionis à raro ad densum ut AV ad VL, sive ut FE ad EB, erit punctum 4 ad ovalem. Quòd si ducantur aliæ quotcunque diametri per centrum B, sed diversæ à diametro LBO, putà MB 12, &c. habebuntur simili constructione unaquaque duo puncta, putà Z, 11, &c. ac per omnia illa puncta ducetur ovalis.

Nec admodùm difficile erit invenire ex tali constructione motum aliquem continuum qui ipsam ovalem uno tractu perficiat; quod rursùs ad Organicam pertinet.

Mirum autem est quanta in præmissa ovali locorum geometricorum seges, nec verò qualiumcunque, sed talium qui inter elegantissimos annumerari possint & debeant. Lubet ergo ex amplissima illa messe spicas aliquas selectiores metere, ex quibus geometræ de tota judicium ferre possint.

In prima ergo constructione diximus BX esse ad XI in ratione refractionis à denso ad rarum. Quòd si ergo, ductâ utcunque semidiametro AI, quæratur in ea punctum X quod ad ovalem esse debet: manifestum est in triangulo BXI (intellige ductam esse rectam BI) dari basim BI, angulum I, & rationem laterum BX, XI. Quia etiam infinitæ sunt semi-diametri, putà A 35, AH, &c. manifestum est quoque infinita esse talia triangula B 10 35, BVH, &c. in quibus omnibus basis data est unà

cum angulis qui sunt ad puncta 35, H, &c. & ratione laterum, quæ semper est ratio refractionis à denso ad rarum. Jam ergo eò deducta est quæstio, ut omnium illorum triangulorum inveniantur vertices X, 10, V, &c. Et quidem tale problema vulgare est: at in praxi proposita, si constructio illius toties repetenda esset quot sunt triangula sive quot sunt invienda puncta per quæ ovalis ducenda sit, id sanè & tædiosum esset, & errori valdè obnoxium. Huic ergo difficultati pulcherrimè occurret geometria, exhibendo nobis locos quosdam, nempe circulorum circumferentias quæ brevissimo compendio dabunt puncta quæsita. Sed quoniam loci illi ex vulgari constructione problematis deducuntur, opetæ prætium erit ipsam explicare; pendet autem illa ex loco quinti exempli præmissi, hoc modo.

Propositâ basi BI cujusvis ex triangulis, putà BXI, cujus vertex X inveniendus sit; secetur ipsa BI in T, ita ut IT ad TB sit quemadmodum FE ad EB, hoc est in ratione refractionis, ita tamen ut BT sit minor terminus, quandoquidem latus BX debet esse minus quàm XI, atque in eadem ratione. Tum productâ rectâ IB ultra B usque in 42, fiat I 42 ad 42 B in eadem ratione, seceturque bifariam recta T42 in Q; ac centro Q, intervallo autem QT, vel Q42, describatur circulus TXY 42, qui secabit rectam AI, dabitque in ea punctum X quæsitum: sed & idem circulus dabit in eadem AI punctum Y: erunt ergo illa puncta vertices duorum triangulorum BXI, BYI, quorum latera erunt in ratione proposita refractionis, ut quidem BX ad XI, ita BY ad YI, & utraque ratio est ut BE ad EF, sive ut BT ad TI.

Quòd si super omnibus basibus datis B 35, BH &c. fiat similis constructio; habebuntur hâc vulgari constructione vertices omnium triangulorum. Patet autem in unaquaque ex illis constructionibus dari centrum unum quale

eſt centrum Q, & duo intervalla qualia ſunt QT, Q 42, ad deſcribendos tot circulos, quot ſunt baſes datæ, ſive quot ſunt centra.

Sed, quod mirum permultis videri poſſit, omnia illa centra exiſtunt in una eademque quadam circuli circumferentia, qualis eſt RQK, quæ ſecat bifariam axem EC in K; & centrum illius P exiſtit in eodem axe producto ultra E, ſic ut ratio FB ad BK eadem ſit cum ratione ſemidiametri AF ad ſemidiametrum KP: unde reſpectu duorum circulorum FH, RK, quorum centra ſunt A, P, punctum B ad utrumque ex iſtis circulis eſt ſimiliter poſitum: ita ut ſi per punctum illud B ducatur recta quæcunque IBQ, arcus IF, QK, qui ad ipſos circulos pertinent, ſint ſimiles, ut ſi unus illorum ſit 30. grad. exempli gratia, erit & alter 30. grad. Similiter ſi ducatur alia recta HBR, erunt arcus HF, RK ſimiles, & punctum R erit centrum reſpectu baſis BH, ad inveniendum verticem V trianguli BVH in recta AH; atque ita de reliquis. Verùm in hac recta AH hoc ſpeciale eſt (quia ipſa tangit ovalem) quòd circulus centro R deſcriptus, exhibeat in ipſa unicum duntaxat punctum V in quo circulus ille tangit tantùm rectam ipſam AH, non autem ſecat, ſicuti ſecant ſuas rectas reliqui circuli quorum centra ſunt in arcu RK, à puncto R ad K.

Manifeſtum eſt ergo circumferentiam RQK centro P deſcriptam, eſſe locum ad centra infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum: hæc ergo circumferentia dicatur primus centrorum locus; dabitur enim alius, ut infrà patebit; dicetur etiam aliquando circulus RQK primus centrorum circulus.

Prætereà, ſicuti in baſi BI inventum eſt ſupra punctum T; ſic in unaquaque alia baſi putà B 35, BH &c. reperiri poteſt punctum ipſi T analogum: erunt ergo infi-

nita talia puncta, ſicuti numero infinitæ ſunt tales baſes: at illa omnia exiſtunt in una eademque circuli circumferentia ET 24 8, quæ ovalem tanget in vertice E; centrum autem illius erit punctum 13 in recta EA inter B & A: eritque ut FB ad BE, ita ſemidiameter FA ad ſemidiametrum E 13: quo pacto rursùs punctum B ad utrumque circulum FIH, ET 8, ſimiliter poſitum erit. Sicuti autem ad inveniendum punctum X verticem trianguli BXI uſi ſumus intervallo QT à centro Q ad punctum T in baſi BI; ſic ad inveniendum punctum 10 verticem trianguli B 10 35, utemur intervallo 44 *r* à centro 44 in circulo RQK, ad punctum *r* in circulo ET 8.

Patet igitur circumferentiam ET8 centro 13 deſcriptam, eſſe locum ad infinita intervalla infinitorum aliorum circulorum, quorum beneficio inveniuntur vertices infinitorum triangulorum. Hæc ergo circumferentia dicatur primus intervallorum locus, dabitur enim ſtatim alius, dicetur etiam aliquando circulus ET 24 8, primus intervallorum circulus.

Rurſus, quemadmodum in eadem baſi BI productâ ultra B, inventum eſt punctum 42; ſic in unaquaque alia baſi reperietur punctum ipſi 42 analogum: ac infinita illa puncta exiſtunt in una eademque circuli circumferentia 15 46 42 C quæ ovalem tanget in vertice C; centrum autem ipſius circumferentiæ erit 27 in axe CE producto ultra E; ſed in præmiſſa figura centrum illud 27 nimis remotum eſſet à reliquis, unde non potuit in ea ſignari: atque ut ſuprà, punctum B reſpectu hujus circuli, ſimiliter poſitum eſt ut reſpectu circuli FIH; quia ut recta FB ad rectam BC, ita eſt ſemidiameter AF ad ſemidiametrum hujus circuli C 27. Quoniam etiam hic circulus terminat intervallum Q 42 æquale intervallo QT, & intervallum 44 46 æquale intervallo 44 *r*, & ſic de reliquis; dicetur idem, ſecundus intervallorum

circulus; & circumferentia illius, secundus intervallorum locus.

Huc usque ergo habemus quatuor circulos, quorum respectu punctum B similiter positum reperitur, nempe FIH qui primus omnium est; KQR qui primus est centrorum circulus; ET 8 qui primus est intervallorum circulus; & C 42 46 qui intervallorum secundus est. Atque etiamsi punctum B nullius ex ipsis quatuor circulis centrum existat; tamen quia ipsum in unoquoque similiter positum est, fit ut omnis recta quæ per B ducta circulos omnes illos secat, abscindat ab omnibus quatuor circumferentiis, arcus similes ad axem CE productum utrinque si opus fuerit, terminatos. Sic recta ITBQ 42 abscindit quatuor arcus, IF, TE, QK, & 42 C omnes inter se similes, atque ita de cæteris.

Cur autem fiat ut in uno ex istis circulis centrum P sit ad unas partes puncti communis B; in alio verò centrum 13 sit ad alteras; nulla alia est causa quàm quòd vertices ipsorum circulorum sunt ad diversas partes ejusdem puncti B: sed minima quæque persequi in exemplis, non vacat: hæc enim facilè supplebit vel mediocris geometra.

Suprà dedimus duas nostræ ovalis constructiones per puncta, quarum prior utebatur ciculo FIH ad determinandas triangulorum bases BI, BH, &c. Posterior verò utebatur circulo GMLNO ad determinandas aliorum triangulorum bases, putà basim AM trianguli AZM; basim AL trianguli AVL; basim AO trianguli A4O, &c.

Itaque circumferentia prioris horum duorum circulorum FIH dici potest primus basium locus; & circulus dicetur primus basium circulus.

Eodem jure circumferentia posterioris circuli GMLNO dicetur secundus basium locus; & circulus, secundus basium circulus.

Quæcumque

Quæcunque autem diximus de primo centrorum loco, ac de primo & ſecundo intervallorum, referuntur omnia ad primam conſtructionem ; ſicuti & primus baſiumlocus. At ſi ad ſecundam conſtructionem reſpiciamus, ad quam pertinet ſecundus baſium locus GMLNO ; tunc reſpectu illius conſtructionis dabitur ſecundus centrorum locus hoc modo.

Primus intervallorum locus ET 24 8 ſecat axem EC productum inter C & A, in puncto 8. & idem locus tangit rectam AL in puncto 17 ; ſicuti ex conſtructione ſecundus baſium locus eandem AL tangit in L ; ſecetur bifariàm recta C 8 in puncto 9 ; tum centro P (hoc enim commune eſt centrum tam primi quàm ſecundi centrorum circuli) intervallo autem P 9, deſcribatur circulus 9 18, qui eandem rectam AL productam ultra L tanget in 18 ; hic ergo erit ſecundus centrorum circulus, & circumferentia illius erit quoque ſecundus centrorum locus ; quomodo autem centra ſecundæ conſtructionis in tali loco accipiantur, poſteà declarabimus. Sed & ſecundus intervallorum locus 15 42 C tangit eandem rectam AL ſupra punctum 18 in puncto 19 ; eritque recta 18 19 æqualis rectæ 18 17, propterea quòd recta 9 8 æqualis eſt rectæ 9 C.

Quòd autem tres circuli, nempe ſecundus centrorum, & ambo intervallorum, tangant rectam eandem AL productam quantùm ſatis, id vi geometriæ deducitur ex conſtrutione illorum, atque ex eo quòd ſecundus baſium circulus eandem tangat ex conſtructione ; ſed demonſtratio, ut elegantiſſima eſt, ita & longiſſima : nos ergo ipſam cum plurimis aliis relinquimus.

Quoniam itaque quatuor illi circuli, ſecundus baſium, ſecundus centrorum,& ambo intervallorum, eandem rectam tangunt, habentque omnes centra ſua in eadem recta AB producta quantum ſatis; atque huic rectæ AB occurrit

ipsa tangens AL in puncto A; sequitur tale punctum A respectu omnium quatuor illorum circulorum, esse similiter positum. Sed & in omnibus quatuor, erunt distantiæ à puncto A usque ad illorum vertices 8, G, 9, C, semidiametris illorum proportionales: erit quippe recta A 8 ad rectam AG ut semidiameter 13 8 ad semidiametrum BG. Et ut recta A 8 ad rectam A 9, ita semidiameter 13 8 ad semidiametrum P 9: atque ita de reliquis.

Unde si per punctum illud A ducatur quæcunque recta quæ circulos illos omnes secet, auferet hæc ab omnibus similes arcus circumferentiarum, à recta AB usque ad puncta sectionum extensos; putà arcus 8 20, G 23, 9 21, & C 22, inter rectas AB, AV &c.

Dicamus verò nunc quâ ratione secundæ constructionis nostræ ovalis centra in circumferentia 15 9 18, quæ secundus centrorum locus est, accipiantur. Ad hoc autem ducatur à centro B ad secundum basium locum GML, quævis semidiameter BL, quæ producta perficiat integram diametrum LBO ut suprà; ducaturque tam AL, quàm AO, quarum utraque basis erit, illa quidem trianguli AVL, hæc autem trianguli A 4 O, quorum vertices quæruntur: illi ergo vertices, beneficio talis secundi centrorum loci, sic reperientur. Prima basis AL occurrit illi secundo centrorum loco in puncto 18; & eadem occurrit primo intervallorum loco in puncto 17; secundo autem, in puncto 19: sumetur ergo pro centro punctum 18, pro intervallo, 18 17, vel 18 19, (æqualia enim sunt illa ut suprà notavimus) tale enim intervallum dabit in semidiametro BL, punctum V quæsitum. Sed & hoc speciale est huic puncto V, quòd ducta AV tangat ovalem in ipso V, eò quòd centrum 18 est punctum contactus rectæ AL & secundi loci centrorum. Similiter, si altera basis AO producatur quousque illa

ex altera parte versùs O, occurrat tam ſecundo centrorum loco in puncto 26, quàm ambobus intervallorum, in punctis 24, & 25, dabit illa centrum aliud 26, & duo intervalla æqualia 26 24, & 26 25; quorum illud quod erit 26 24, terminabitur in primo intervallorum loco; (centrum 26, & alterum intervalli punctum 25, in noſtra figura, nimis longè diſtarent à puncto A) tali ergo centro, ac tali intervallo, inveniemus in ſemidiametro BO, punctum quæſitum 4 in ovali.

Simili modo, ſi in ſecundo baſium circulo, ducatur diameter M B 12; huic convenient duæ baſes, AM, & A 12, pro triangulis AZM, A 11 12; (finge triangula illa eſſe abſoluta, quod vitandæ confuſionis gratiâ hîc factum non eſt) ac unaquæque ex illis baſibus ſecabit tam ſecundum locum centrorum, quàm utrumque intervallorum; dabitque in illo quidem centrum, in his verò, intervallum, cujus beneficio, in utraque ſemidiametro BM, B 12, invenietur punctum Z, vel 11, quæſitum.

In hac verò ſecunda conſtructione unicum centrum, putà 18 dat in ovali unicum punctum putà V; quod idem de omnibus aliis verum eſt; cùm è contrario, in prima conſtructione unicum centrum Q dederit duo puncta X & Y.

Neque verò prætereundum eſt quomodo talium locorum beneficio, & centra, & intervalla, ac denique puncta ad ovalem pertinentia facillimè inveniuntur. Quod ſanè in prima ex duabus præmiſſis conſtructionibus præſtitiſſe ſufficiet: hinc enim, quâ ratione eadem methodus ad ſecundam conſtructionem accommodari poſſit, illicò patebit. Quæcunque autem circa tale argumentum dicturi ſumus, praxim reſpiciunt, quæ hoc modo expeditiſſima, & certiſſima reddi poteſt.

Deſcriptis ergo ſecundùm præſcriptas leges ſex cir-

culis ſive ſex locis ut ſuprà, duobus quidem baſium, duobus centrorum, & duobus intervallorum: aſſumatur in primo loco baſium, quodvis punctum I inter F & H (ultrà enim inutile fore ſuprà notatum eſt) & jungatur recta AI, in ea enim reperiri debent duo puncta X, Y, ad ovalem pertinentia: tum arcui FI ſumantur duo alii arcus ſimiles, alter KQ in primo centrorum loco, alter ET in primo loco intervallorum: ac ſumpto intervallo QT, & pede circini manente in centro Q, notentur altero pede mobili duo puncta X, Y, in recta AI, ut propoſitum eſt.

Verùm, inquiet aliquis, poſſuntne promptè ac expeditè haberi arcus ſimiles in diverſis iiſque inæqualibus circulis? Poſſunt ſanè, nec uno modo; ſed hic omnium facillimus jure videri poſſit. Duc quamcunque baſim BH (extrema ad extremum punctum H pertinens, in hac prima conſtructione, reliquis præſtat, in ſecunda conſtructione, nihil refert) quæ producta quantùm ſatis, dabit in primo loco centrorum arcum KR; ac in primo intervallorum, arcum ES, qui inter ſe, & ipſi FH ſimiles erunt. Dividantur omnes illi tres arcus ſinguli in quotcunque partes æquales, ita tamen ut partes unius ſint quoque numero æquales partibus alterius: putà, dividatur unuſquiſque primùm bifariàm, deinde quælibet pars rursùs bifariàm, atque ita continuè quantùm quis voluerit. Hoc enim pacto, puncta arcus FH terminabunt ſemidiametros AI, AH, &c. Puncta autem prædictis ordine correſpondentia in arcu KR, dabunt centra Q, R &c. ac tandem puncta eodem ordine ſumpta in arcu ES, terminabunt intervalla. Cætera ſunt facilia, nec eſt cur in iis immoremur.

Expeditis ut ſuprà, quæ ad primum & quartum ex caſibus particularibus refractionum pertinebant, ſupereſt nunc ut reliquis duobus, ſecundo ſcilicet & tertio,

ſatisfaciamus : nempe ut explicemus rationem componendi loci qui duobus illis caſibus inſerviat. Sed antequàm ad rem ipſam veniamus, lubet hîc aliquantiſper immorari circa quatuor præcipua puncta figuræ præcedentis, duo nempe focorum A, B; & duo verticum C, E : ex tali enim conſideratione magis eluceſcet analogia quæ inter caſus jam expeditos, & eos de quibus agendum ſupereſt, intercedit; quæ quidem analogia ad eorumdem caſuum figuras extenditur, habetque aliquid ſimile ei analogiæ quæ in doctrina conica reperitur inter hyperbolam & ellipſim. *Vide Figur. pag. 159.*

Statuamus primùm ex illis quatuor punctis, duo B, & C, eſſe immobilia, eademque remanere in eo ſtatu in quo hucuſque conſtituta ſunt : at punctum A (quod primum ac præcipuum eſt) mobile eſſe, idemque diverſas poſitiones ſucceſſivè ad arbitrium obtinere, ac tandem quartum E eatenus mobile eſſe, quatenus neceſſitas geometrica id exiget : exiſtant tamen omnia quatuor in una eademque recta linea AB, quæ ad hoc negotium, utrinque indefinitè producatur.

Ergo, reſpectu puncti B, vel ipſum punctum A erit versùs C, vel versùs E. Et ſiquidem illud ſit versùs C; vel erit intra figuram inter B, C; vel illud erit in vertice C; vel idem erit extra figuram ultra C, ut in figura præmiſſa ; ſed ita ut ab ipſo puncto C longiſſimè, immò infinitè diſtare poſſit. Rursùs, ſi reſpectu puncti B, punctum A ſit versùs E; vel illud A erit inter puncta B, E intra figuram; vel illud erit in vertice E; vel idem erit extra figuram ultra E, ſic ut ab ipſo puncto E longiſſimè, immò infinitè diſtare poſſit. Tandemque illud idem punctum A conſiderari poteſt tanquam ſi puncto B congruat; ita ut ambo ſimul unicum punctum efficiant.

Incipiamus ab hoc ultimo ſtatu quo punctum A punc- *I. Status.*

to B congruit : tunc verò loco ovalis CVE 7 habebimus circulum, cujus centrum erit idem punctum commune A vel B, & intervallum sive semidiameter BC, cui æqualis erit BE ; unde punctum E vi geometricâ ; tantùm distat à puncto B quantùm C ab eodem B. Duo loci basium describentur circa idem centrum B vel A secundùm præscriptas leges in præcedenti constructione, ex duobus locis centrorum, alter, nempe primus coalescet in unicum punctum B, alter erit circumferentia ejusdem circuli CVE 7 qui loco ovalis succedet: tandemque ipsa eadem circuli CVE 7 circumferentia referet duos reliquos locos intervallorum. Sed omnia ad Dioptricam erunt planè inutilia.

II. Status. Esto deinde punctum A intra ovalem inter B & C: ac tunc fiet figura ovalis in qua præcipuus vertex C propior erit præcipuo foco A quàm vertex E foco B ; attamen distantia BE minor erit quàm BC; atque ita excessus rectæ AE supra rectam AC major erit quàm excessus rectæ BC supra rectam BE ; ac duorum illorum excessuum ratio erit ipsa ratio refractionis. Sex loci, nempe duo basium, duo centrorum, & duo intervallorum, non aliter invenientur quàm in præcedenti figura, sed illi paulò aliter erunt dispositi, quod tamen nullius momenti est; quia hæc omnia ut priùs, ad Dioptricam sunt inutilia.

III. Status. Esto jam punctum A in præcipuo vertice C : quo pacto fiet ovalis quàm acutissima esse potest versùs ipsum C, versùs E autem, quàm obtusissima : siquidem, dum focus A procedit à B ad C, ipsa ovalis in vertice C fit semper acutior; in E autem, obtusior, quousque ipse focus A pervenerit in C, à quo procedendo extra ovalem, vertex C fit minùs acutus, E verò minùs obtusus. At hoc in statu foci primarii A in præcipuo vertice C constituti, ratio axis CE ad excessum quo recta BC superatr ec-

tàm BE, eſt ipſa ratio refractionis. Primus locus baſium, primus centrorum, & primus intervallorum inveniuntur ut in ſuperiori conſtructione factum eſt, inter quos ille qui primus eſt intervallorum tranſit etiam per C vel A; quo pacto idem cùm tranſeat per extrema axis C, & E, tangit ovalem in ambobus illis punctis, & centrum illius eſt in medio axis ejuſdem in K. Secundus locus baſium, ſecundus centrorum, & ſecundus intervallorum omnes tranſeunt per idem punctum C vel A, ſed centris differunt: illa tamen, qui hæc ovalis ad Dioptricam nihil confert, relinquenda judicavimus.

Exiſtat nunc focus A extra ovalem, ultra verticem C, non tamen infinitè; tunc autem omnia ſe habebunt prorsùs ut in præmiſſa figura; ita tamen ut, quò major erit ratio rectæ AB ad rectam BC, eò magis ovalis ipſa ad figuram veræ ellipſis conicæ accedat, neque tamen unquam vera ellipſis fiat. Ac in illa, portio circa præcipuum verticem C ad Dioptricam utilis eſt, ut in deſcriptione figuræ præmiſſæ notavimus. *IV. Status.*

Abeat nunc punctum A in infinitum ultrà C, qui ſtatus nobiliſſimus eſt, præbet enim veram ellipſim conicam, ac prorsùs eam quæ undecimo exemplo expoſita eſt, quamque ibidem ad Dioptricam pertinere monuimus, cùm ſcilicet ratio axis AH ad diſtantiam focorum BM eſt ipſa ratio refractionis. Hîc verò omnes ſex loci baſium, centrorum, & intervallorum abeunt in lineas rectas: ſed ex illis, ſecundus baſium, & ſecundus centrorum infinitè diſtant à præcipuo vertice, qui in figura ejuſdem exempli erit A; reliqui quatuor tranſeunt per puncta quæ ibidem ſunt C, H, A, & centrum ellipſis, ſuntque illi omnes quatuor ad axem ejuſdem ellipſis perpendiculares. Quoniam autem à puncto illo qui præcipuus vertex eſt & infinitè diſtat, duci debent rectæ: ſciendum eſt ipſas duci debere axi ellipſis *V. Status.* *Vide Figur. pag. 149.*

parallelas. Cætera facilè intelligentur ab eo qui doctrinæ Infiniti in Geometria assuevit.

Similiter, si præcipuus focus A infinitè distet ab altero foco B, ex altera parte versùs secundum verticem E, idem omninò accidet quod jamjam diximus, cùm idem infinitè distaret versùs C; nam ex doctrina infiniti, idem est distare infinitè versùs C, ac distare infinitè ad contrarias partes versùs E: quod sanè illis qui tali doctrinæ minimè assuefacti sunt mirum videri solet, & plerisque absolutè impossibile.

Apparet ergo ex suprà dictis, id quod hucusque latuisse opinamur, nempe in ellipsi conica, quatenùs illa ad Dioptricam referri potest, tres intelligi debere focos, duos scilicet internos, & unum externum qui infinitè distet à quovis ex duobus verticibus. Unum dicimus externum, non duos, etiamsi cuivis doctrinæ infiniti imperito, ille minimè unus, sed duo infinitè à se invicem distantes videri possint. Ille enim quandiu in distantia finita à foco B distitit, ut suprà, unicus fuit A; postquàm autem abiit in infinitum versùs C, idem eodem modo se habet, ac si uno saltu transilierit ad alteram partem versùs E, paratus regredi ab illa parte versùs E secundùm rectam lineam N F E B, usque ad B unde moveri cœperat: immò, sive versùs C, sive versùs E infinitè distare ipse intelligatur, perinde est, quod ad constructionem pertinet: quæcunque enim recta ab eo duci intelligetur, illa axi CE semper existet parallela.

Superest nunc ut ipsum focum A consideremus ab infinita distantia versùs E regredientem usque ad B secundùm rectam NFEB, hic enim status dabit locos illos qui duobus reliquis particularibus casibus refractionum satisfacient. De his agemus posteà, sed priùs operæpretium fuerit statuere puncta A & C fixa, B verò mobile

ad

ad arbitrium; at E rursùs catenùs mobile tantùm, quatenùs vis geometriæ id postulabit. Neque enim hujus speculationis fructus minor futurus est quàm præcedentis cum qua sanè multa habet communia, sed multa etiam planè diversa, cùm scilicet punctum B in infinitum abibit.

Itaque vel puncta immobilia A & C sunt simul, vel illa à se invicem sejuncta sunt. Si simul sint, vel punctum mobile B eisdem congruit, ita ut tres simul existant, vel idem B ab ipsis A, C, distat; idque vel secundùm distantiam finitam, vel infinitam.

Si tria puncta A, B, C simul existant, tum quartum E cum iisdem existet, evanescetque ipsa ovalis, quæ in idem punctum coalescet, atque unà cum ea omnes sex loci: estque status hic prorsùs inutilis. *VI. Status.*

Si puncta AC simul existant, B autem ab iis utcunque distet, sed finitâ distantiâ, habemus tertium statum ex iis qui suprà expositi sunt, cùm punctum A mobile erat, idemque in C constituebatur. *VII. Status.*

Si punctis A, C, invicem constitutis, punctum B ab utroque infinitè distet ex utravis parte (perinde enim est ex doctrina infiniti, ut suprà,) tunc nulla habebitur ovalis, sed loco illius succedent duæ rectæ secantes se invicem in puncto communi AC, ita ut recta AB angulum ab illis contentum bifariàm dividat; eritque ille angulus tantus quantus debetur assymptotis hyperbolæ illius de qua undecimo exemplo dictum est, posito quòd ratio axis ad focorum distantiam sit ipsa ratio refractionis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad rectam AB perpendiculares, sed ex iis tres primi infinitè distant, sicuti & punctum B; tres secundi in unicam coalescunt rectam quæ per punctum commune AC transit: at illa omnia ad Dioptricam sunt inutilia. *VIII. Status.*

Jam puncta AC, quâcunque distantiâ finitâ à se invi-

cem diſtent, & punctum mobile B incipiat ab A, moveaturque ad C, & ultrà uſque in infinitum.

IX. Status. Exiſtente ergo puncto mobili B in A, loco ovalis habebimus circulum, cujus centrum erit punctum illud commune A vel B, intervallum AC. Et hic ſtatus ſuprà expoſitus eſt, fuitque primus.

X. Status. Exiſtente autem ipſo puncto mobili B inter A & C, multi habebuntur ſtatus inter ſe diverſi, de quibus agemus poſteà; illi enim ſunt qui reliquis duobus caſibus particularibus refractionum ſatisfaciunt.

XI. Status. Exiſtente jam ipſo B in C, evaneſcet ovalis, eademque in idem punctum B vel C coaleſcet; quod jam ſuprà notatum eſt, atque inter inutilia repoſitum: is ſtatus ſextus fuit.

XII. Status. Exiſtente deinde puncto B ultra C, ita ut C ſit inter duo B, A, habebimus ſtatum figuræ præmiſſæ in qua tamdiu immorati ſumus: & idem ſtatus ſuprà fuit quartus.

XIII. Status. Exiſtente porrò puncto B ultra C vel ultra A in diſtantia infinita ex quacunque parte (perinde enim eſt, ut jam non ſemel notavimus) tunc ſtatum nobiliſſimum habebimus: abibit enim ovalis noſtra in hyperbolam illam de qua undecimo exemplo dictum eſt, cùm ſcilicet ratio axis ad focorum diſtantiam eſt ipſa ratio refractionis. Ac hujus quidem hyperbolæ vertex præcipuus erit, hoc loco, in C; alter minus præcipuus E abibit in infinitum: quæ autem huic hyperbolæ opponitur alia hyperbola, reſpectu præcipui foci A erit inutilis. Sex loci abeunt in lineas rectas ad axem infinitè productum perpendiculares; ſed ex iis duo primi infinitè diſtant versùs C, nempe primus baſium, & primus centrorum; primus intervallorum tranſit per verticem hyperbolæ inutilis, ſecundus intervallorum tranſit per præcipuum verticem C. Secundus centrorum tranſit per centrum hyperbolarum; ſecundus autem baſium tranſit per illud

punctum in quo recta AC sic dividitur, ut tota AC ad portionem ipsi puncto C conterminam, habeat rationem refractionis à raro à densum.

Apparet ergo idem hyperbolæ conicæ accidere quod de ellipsi suprà dictum est, quodque antiquos latuisse opinamur; nempe, præter duos focos vulgares de quibus in conicis agitur, quique distantiâ finitâ à centro ultra vertices removentur, dari tertium qui ex utravis parte infinitè distet ab eodem centro, quatenùs scilicet ipsa hyperbola ad Dioptricam refertur, &c. ut suprà de ellipsi.

Tandem verò punctum mobile B ab infinita distantia ultra A regrediatur versùs ipsum A à quo moveri incœpit, ita ut idem A existat inter C & B; ac tunc habebimus secundum statum illum inutilem de quo dictum est dum punctum A mobile statuebatur, atque illud existebat intra ovalem inter B & C; nec est quod hîc ultrà addamus. *XIV. Status.*

Quòd si quærat aliquis quinam hujusce speculationis circa mobilia puncta fructus futurus sit, præcipuè circa locorum doctrinam ad quam pertinere debent hæc nostra exempla : sciat ille primùm quidem in universum, tali, vel aliâ simili consideratione apprimè detegi naturam figurarum omnium; cùm scilicet ritè notaverimus quid ex diverso situ præcipuorum punctorum ad illas pertinentium, eisdem figuris accidere possit, unde illæ immutari queant.

At in specie, quòd ad locos attinet, meminerit vix aliter detegi posse quomodo illi invertantur, aut in figuras genere, aut specie diversas permutentur; quemadmodum suprà vidimus locum illum de quo hoc duodecimo exemplo agimus, nunc esse ovalem aliquam, nunc circulum, & aliquando ellipsim, aut etiam hyperbolam : quod adhuc in iis quæ statim dicturi sumus, non minùs evidenter apparebit.

XV. Status. Præteriimus suprà eum statum in quo punctum B mobile procedens ab A, progreditur, non quidem versùs C, sed ad contrarias partes usque in infinitam distantiam, quia status ille ad Dioptricam inutilis est: quandiu enim ipsum existit in distantia finita, habetur secundus status in quo A statuitur inter B & C, de quo suprà; cùm autem idem existit in distantia infinita, habetur hyperbola inutilis, cujus focus internus est A, vertex autem inter A & C; ac illud C est vertex hyperbolæ oppositæ, quæ sanè opposita poterit esse utilis, sed illa eadem prorsùs erit cùm ea de qua duodecimo statu locuti sumus.

Nihil etiam diximus de puncto C infinitè distante, quia tunc evanescit omnis figura, atque unà cum ea, quæcunque puncta ad eandem pertinebant: quæ omnia in infinitum abeunt.

In universum ergo, res eò reducitur ut vel A focus infinitè distet, ac tunc habetur ellipsis utilis; vel B focus infinitè distet, ac tunc habetur hyperbola, cujus altera ex oppositis utilis est, altera inutilis; vel ex tribus punctis A, C, B medium sit C, ac tunc habetur status utilis, cui inservit figura præmissa; vel A & C simul existant, vel A sit medius inter C & B, vel idem A sit in B, qui tres status sunt inutiles, sicuti & inutiles sunt duo illi in quibus vel tria puncta A, C, B, vel, quod eodem recidit, duo B & C simul existunt; vel tandem punctum B medium sit inter C & A: unde septem oriuntur status nondum expediti, atque omnes utiles, de quibus agendum nobis superest, quia illi omnes & soli duobus reliquis particularibus refractionum casibus satisfacient. Nec multùm in singulis immorabimur; illi enim omnia habent præmissis analoga, scilicet focos, vertices, & locos basium, centrorum, & intervallorum; sed illa omnia positione differunt, atque ex diversa

illa positione, figuræ diversissimæ evadunt.

Primus ergo ſtatus ex illis ſeptem reliquis eſto ille in quo duo puncta B, & E media ſunt inter focos C, A; ac vertex ſecundus E medius quoque eſt inter B & A; cui ſtatui inſervit figura ſequens: in qua quatuor puncta C, B, E, D, ſe habent prorsùs ut anteà; ita ſcilicet ut rectæ CD, BE, ſint æquales; ſicuti & CB, DE; ſitque tota CE ad mediam BD in ratione refractionis à raro ad denſum. At quia præmiſſæ conditiones omnes non ſolùm huic ſtatui, ſed etiam tribus ſequentibus conveniunt, ideò huic primo illud peculiare eſto quòd ratio rectæ AE ad rectam EB ſit major ipsâ ratione refractionis à raro ad denſum. In ſecundo autem ſtatu ponetur hæc ratio AE ad EB eſſe præcisè ratio refractionis à raro ad denſum. In tertio è contrario, ponetur AE eſſe ad EB in ratione minori quàm ſit ratio refractionis à raro ad denſum, non minori tamen quàm à denſo ad rarum. In quarto, ponetur ratio AE ad EB eſſe minor ratione refractionis à denſo ad rarum, quouſque punctum A pervenerit ad verticem E. In quinto, ponetur punctum illud A eſſe in E. In ſexto, ponetur idem A eſſe inter B & E intra ovalem; ita tamen ut ratio totius BE ad portionem EA major ſit quàm ratio refractionis à raro ad denſum. In ſeptimo denique ſtatu, ponetur ipſum A rursùs intra ovalem inter B & E, ſed propiùs ad idem B; ita ut ratio BE ad EA non major ſit ratione refractionis à raro ad denſum, ſed vel eidem æqualis, vel ipsâ minor.

Etſi verò figuræ omnes, quæ ſigulis ex iſtis caſibus propriæ ſunt, differant tam inter ſe, quàm ab ea quam primam ſuprà expoſuimus; ipſæ tamen plurima habent inter ſe ſimilia: immò illæ omnes ſic delineari ac notis diſtingui poſſunt, ut una eademque explicatio omnibus inſerviat, nec alia diſtinctio abhibenda ſit, quàm circa poſitionem aliquot punctorum, quorum quæ in

una figura priora fuêre, eadem in alia figura fient posteriora, & quæ erant media, fient extrema, aut omninò quid simile. Talis sanè est præmissa explicatio, quæ etiamsi primæ figuræ usqueadeò quadret, ut illi soli propria esse appareat, & reverà soli illi propria sit strictè loquendo; eadem tamen, paucis tantùm mutatis, omnibus inservire potest. Id verò in hac secunda figura clarè intueri licet: sed ad hoc monendus est lector, ut quotiescumque in dicta aliqua inciderit quæ secundæ illi figuræ quadrare non videbuntur, tum ipse huc recurrat ad ea quæ statim dicturi sumus, quæque continent præcipua capita in quibus discrepant ejusmodi figuræ.

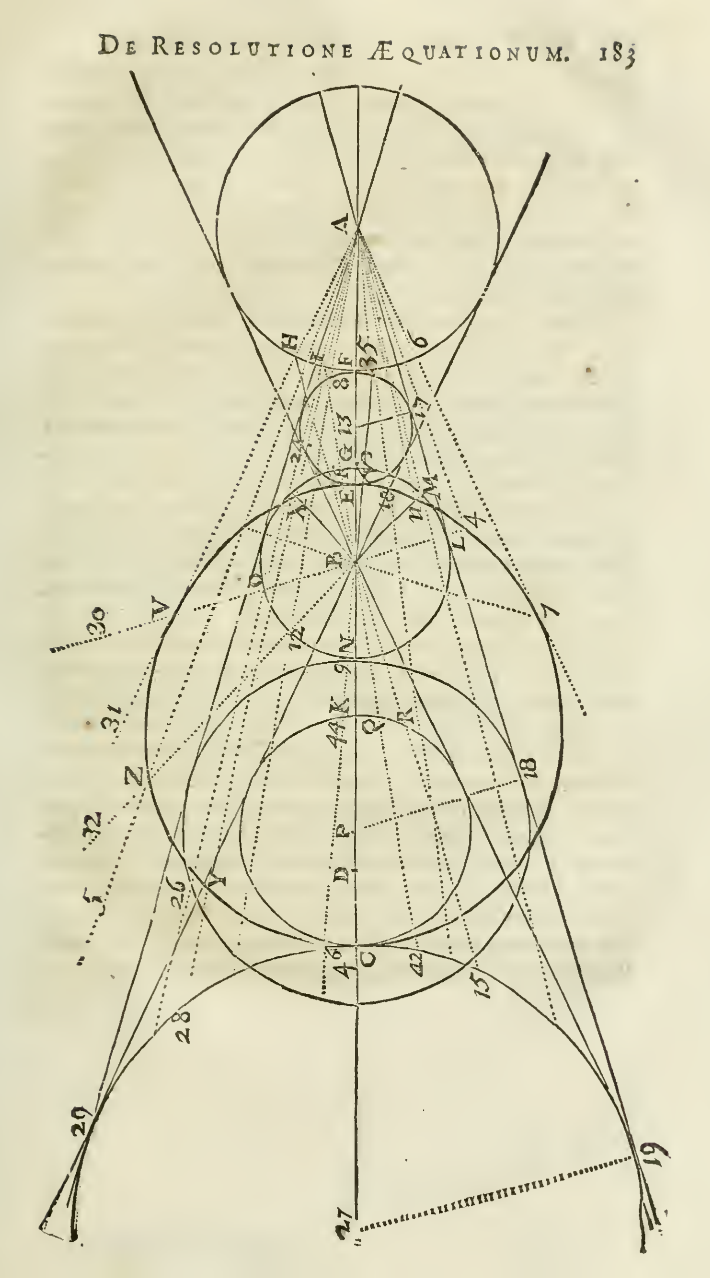
Ac primùm, in hac secunda figura, quia punctum A est ultrà tria puncta C, B, E, versùs E, quod contrarium est primæ figuræ: fit ut punctum G sit quoque ad easdem partes ipsius E, cùm in prima esset versùs C.

Secundò, anguli recti ALB, LBH, in secunda figura sunt interiores & ad easdem partes respectu parallelarum AL, BH, qui tamen in prima erant alterni.

Tertiò, in secunda figura, intervallum AF minus est quàm AB, quod in prima majus erat.

Quartò, cujuscunque longitudinis reperiatur intervallum AF in secunda figura, semper ovalis utilis erit; quod in prima verum non erat.

Quintò, hæc secunda figura satisfacit secundo & tertio casui ex quatuor illis particularibus casibus refractionum ad perspicilla pertinentium qui suprà expositi sunt, cùm prima satisfaceret primo & quarto, ut dictum est. Nam in eadem secunda, posito corpore denso diaphano ab ipsa ovali comprehenso, atque ad formam illius perpolito, putà vitro, cui alterum corpus rarius undique contiguum sit, putà aër qui vitrum ambiat: radii omnes ad punctum A tendentes, atque in superficiem VC7 incidentes, refringuntur præcisè in punc-



tum B; hic verò eſt terius ex iiſdem quatuor caſibus. Atque è contrario, radii omnes à puncto B procedentes, atque in eandem ſuperficiem VC7 incidentes, poſt refractionem divergunt extra ovalem tanquam ſi omnes ex puncto A progreſſi ſint: & hic eſt ſecundus caſus. Sic, ſi radius incidentiæ in raro ſit 28 Y tendens versùs A, radius refractionis in denſo erit YB: atque è contrario, ſi radius incidentiæ in denſo ſit BY, erit radius refractionis in raro Y 28.

Quòd ſi corpora permutentur, ut rarius ſive aër contineatur ſub forma ovali propoſita, denſiore ſeu vitro ipſum coarctante: tunc radii omnes qui intra rarum procedunt à puncto A, incidųntque in ſuperficiem VC7, ſic refringuntur, ut intra denſum divergant tanquam ſi à puncto B progreſſi ſint. Atque è contrario, radii omnes in denſo ad punctum B convergentes, atque in eandem ſuperficiem VC7 incidentes, ſic refringuntur, ut intra rarum ad punctum A convergant. Sic radio incidentiæ exiſtente AZ intra rarum, fiet in denſo radius refractionis Z 32 qui à puncto B procedit; & è contrario, exiſtente intra denſum radio incidentiæ 32 Z qui ad punctum B tendit, fiet intra rarum radius refractionis ZA. Quo pacto rursùs alio modo ſatisfactum eſt ſecundo ac tertio ex prædictis quatuor caſibus particularibus.

Sextò, centra circulorum illorum ſex quos ſuprà aſſignavimus pro locis centrorum, intervallorum, & baſium, multò aliter in hac ſecunda figura, quàm in prima, diſpoſita ſunt. Nam in hac ſecunda figura centrum P quod ad locos centrorum pertinet, reperitur inter vertices C, E, quod tamen in prima figura erat ultrà. Item, in eadem ſecunda figura, centrum 27. quod ad ſecundum locum intervallorum pertinet, abit ultra verticem C, quod tamen in prima abibat ultra E.

Septimò,

Septimò, quoniam ambo foci A, B in hac secunda figura reperiuntur extra utrumque circulum intervallorum: fit ut tam ambæ rectæ quæ à puncto A procedentes, tangunt secundum locum basium GLNO, quàm ambæ quæ à puncto B procedentes, tangunt primum locum basium FIH: tam hæ tangentes, inquam, quàm illæ, tangant quoque utrumque circulum intervallorum ET 248, & 19 C 29, si scilicet tangentes illæ quantùm satis producantur.

Cæteras differentias quivis facilè percipiet: ideò nos ultrà progrediemur.

Assignavimus suprà differentiam quæ intercedit inter septem illos status in quibus punctum B reperitur inter A & C, diximusque primum in hoc à cæteris distingui, quòd in eo ratio AE exterioris ad BE interiorem (intellige respectu ovalis) major sit ratione refractionis à raro à densum. Huic autem statui omninò accommodata est secunda figura præmissa, in qua ideò primus locus intervallorum ET 24 8 totus extra ovalem existit versùs A & punctum F inter duo A & E constituitur.

Jam secundus status nobilissimus est, in quo scilicet ratio AE ad EB est ipsa ratio refractionis à raro ad densum, unde puncta A & F in unum idemque punctum coalescunt.

In tali autem statu, loco ovalis habemus circulum qui utilis est eodem prorsùs modo quo utilis est præmissa ovalis secundæ figuræ, putà portio illa quæ est circa verticem C usque ad contactus V, 7, quæ portio satisfacit secundo & tertio ex quatuor casibus particularibus refractionum, ut diximus in quinto ex septem capitibus, quibus præmissa secunda figura à prima discrepat. Nec quicquam circa talem explicationem immutandum est, ita ut illa conveniat tam ovali secundæ figuræ, quàm circulo tertiæ sequentis, in qua, etiamsi puncta B, C,

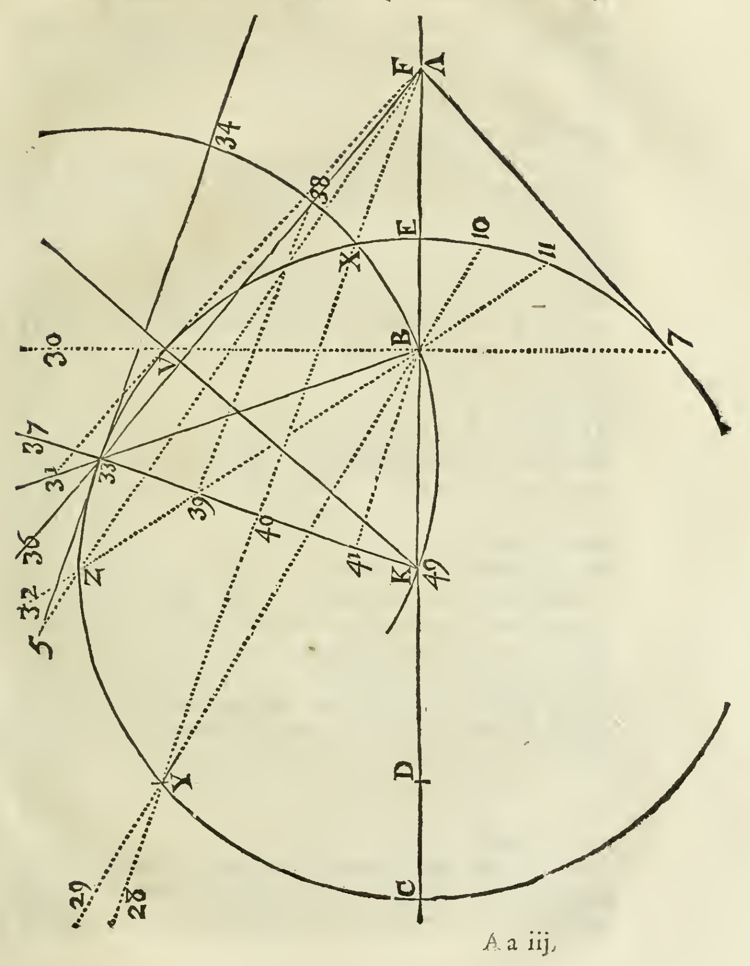
D, E eodem prorsùs modo dispofita fint quo in 2ª figura, tamen, propter rationem refractionum à raro ad densum quæ intercedit inter rectas AE, EB, fit ut fex loci de quibus toties fuprà dictum eft, finguli amifsâ fuâ extenfione feu magnitudine, in puncta coaluerint; primus fcilicet locus bafium in punctum A; fecundus bafium in punctum B; ambo centrorum in punctum K, quod eft centrum propofiti circuli CVE7; primus intervallorum in punctum E; ac tandem fecundus intervallorum in punctum C.

At verò, quòd proprietas adeò infignis circulo CVE7 conveniat; pofito fcilicet quòd tam ratio AE ad EB, quàm ratio diametri EC ad BD fit ratio refractionis à raro ad denfum, ac proinde etiam ratio AC ad CB; (hæc enim tertia ex duabus prioribus fequitur) quòd, inquam, quivis radius 36 33 à raro quod eft extra circulum, putà ab aëre incidens in denfum quod eft intra circulum, putà in vitrum, in punctum 33 quod eft in circumferentia, fi dirigatur ad punctum A, non tamen ad idem A perveniat, fed frangatur in ingreffu 33, ac fractus abeat in B, illud ex fequenti demonftratione manifeftò patebit: quæ quidem demonftratio circulo fpecialis eft, nec prolixa; univerfalis enim, quæ tam ovalibus quàm circulo conveniret, longiori indigeret apparatu, ut jam fuprà monuimus.

Ad hoc autem tria notanda funt. Primum, quoniam eft ut AE ad EB, ita AC ad CB, & quatuor puncta A, B, C, E funt in eadem recta linea, eftque A extra circulum, B intra, at EC eft diameter; fit neceffariò ut eductâ ex B puncto rectâ perpendiculari ad diametrum EC, atque eà utrinque productâ ufque ad circumferentiam, puncta in quibus ipfa circumferentiæ occurrit, fint ipfa V & 7, in quibus rectæ AV, A7 ipfum circulum tangunt, ita ut ductâ rectâ KV, angulus KVA rectus

ſit, atque ita, ratio rectæ AV ad VB ſive KV ad KB, rationi rectæ AK ad KV ſit ſimilis: atque earum rationum converſæ ſimiles, ſcilicet BV ad VA, BK ad KV, & VK ad AK. Secundum, propter eandem rationem AE ad EB, & AC ad CB, fit ut duæ quæcunque rectæ A 33, B 33 quæ ad idem punctum 33 in circumferentia utcunque aſſumptum ducuntur, in eadem quoque ratione exiſtant, putà ut AE ad EB, ſive ut AC ad CB: nam circumferentia EV 33 C 7 talem locum exhibet, qualem quinto loco explicuïmus, atque ideò etiam eadem eſt ratio AV ad VB, & AZ ad ZB, & AY ad YB, &c. unde, quoniam ponitur ratio AE ad EB eſſe ratio refractionis à raro ad denſum, erit quoque AV ad VB, A 33 ad 33 B, &c. ratio refractionis à raro ad denſum. Tertium, ductâ rectâ 5 33 34 quæ circulum tangat in puncto 33, tum rectâ 33 K ad centrum K, erit angulus K 33 34 rectus; ac eodem modo fient refractiones radiorum in punctum 33 incidentium à circuli circumferentia E 33 C, quo à linea recta tangente 5 33 34; ſiquidem in univerſum, linea quæcunque curva, & recta ipſam tangens, eaſdem efficiunt refractiones radiorum in punctum contactus incidentium. Poſitâ ergo curvâ C 33 E, vel rectâ 5 33 34 pro dioptrica, ſive pro ſuperficie refractiva, & exiſtente puncto 33 puncto incidentiæ, erit recta 33 K perpendicularis ad dioptricam.

His præmiſſis, centro 33 intervallo quocunque, putà 33 B, deſcribatur circulus ſecans perpendicularem 33 K in puncto 49, rectam 33 A in puncto 38, & rectam 33 34 in puncto 34; eritque arcus 49 34 quadrans; & rectæ 33 49, 33 B, 33 38, & 33 34 erunt æquales. Sed, quod præcipuum eſt, demiſſis in rectam 33 49 productam ſi ſit opus, perpendicularibus A 40, B 41, & 38 39: oſtendendum eſt 38 39 ad B41 eſſe in ratione refractionis; putà ut AE ad EB; hoc enim demonſtrato, manifeſtum erit


F
Λ
34
38
E
10
11
X
30
V
B
7
37
31
33
39
40
41
49
K
36
Z
32
5
Y
D
C
29
28

ex lege refractionum quam undecimo exemplo suprà expoſuimus, fore ut ſi radius incidentiæ ſit 36 33 38 A, tunc radius refractionis ſit 33 B, & viciſſim ſi radius incidentiæ ſit B 33, tunc radius refractionis ſit 33 36: hoc autem ſic demonſtramus.

Ratio perpendicularis 38 39 ad perpendicularem B 41, componitur ex rationibus 38 39 ad A 40, & A 40 ad B 41: eſt autem 38 39 ad A 40, ut 38 33 ad 33 A, ſive ut B 33 ad 33 A; & ut A 40 ad B 41, ita AK ad KB: quare ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus B 33 ad 33 A, & AK ad KB: ut autem B 33 ad 33 A, ita BV ad VA, ut jam ſecundo loco notavimus, & ita BK ad KV; ideoque ratio 38 39 ad B 41 componitur ex rationibus AK ad KB, & BK ad KV, quæ ambæ conſtituunt rationem AK ad KV. Ut ergo 38 39 ad B 41, ita AK ad KV, ſive AV ad VB, ſive AE ad EB, quæ eſt ratio refractionis, ut propoſitum eſt. Cùmque idem accidat omnibus punctis quæ in arcu VC7 aſſumi poſſunt, patet arcum illum eſſe locum ad propoſitas refractiones, quarum ratio erit ut AE ad EB; quæ ſanè perinſignis eſt circuli proprietas huc uſque, ut exiſtimamus ignota.

Hoc pacto iis ſatisfecimus quæ initio duodecimi exempli oſtendere polliciti ſumus, nempe caſum tertium ex tribus univerſalibus Dioptricæ caſibus de quibus undecimo exemplo dictum eſt, aliquando ad ſuperficiem ſphæricam pertinere, ſed multò magis univerſaliter ad alias ſuperficies (nempe ovales de quibus ſuprà) quas antiquis notas fuiſſe nullibi apparet. Patet enim hunc ſecundum ſtatum qui ad circulum, atque adeo ad ſphæram pertinet, eſſe ſpecialiſſimum, alios verò qui ad ovales, eſſe univerſaliores.

Porrò, qui ſuperſunt ſtatus quinque, ad alias ovales pertinent, quas figurâ exhibere ſupervacaneum hoc loco duximus; neque enim ex prædictis difficile fuerit

easdem satis accuratè describere. Quamobrem, postquàm ea breviter exposuerimus in quibus illæ à prædictis præcipuè differunt, tunc ulteriùs exemplis parcemus, duodecim præmissis contenti, quæ sanè perillustria sunt; atque ita ad id quod initio propositum est, accedemus.

Tertius ergo status ad ovalem quandam pertinet, in qua sex loci basium, centrorum & intervallorum describuntur. Sed quia punctum A reperitur inter E & F, hinc fit ut quinque ex illis locis, integri intra ovalem constituantur, nempe præter primum basium, reliqui omnes; primus enim basium, vel totus est extra ovalem, vel aliquid tantùm habet intrà; punctum N est versùs E; punctum G est versùs K; punctum 8 est versùs B, atque ita pleraque ex punctis contrario modo disposita sunt quo in secunda figura: est tamen ovalis ipsa tota, ut omnes de quibus hucusque egimus, ad easdem partes cava, quod tribus proximis sequentibus statibus non accidit. Cùmque AE est ad EB in ratione refractionis à raro ad densum, tunc ipsa ovalis ultima est earum quæ ad easdem partes totæ cavæ existunt; ulteriùs enim, puncto A propiùs accedente ad E, tunc partes ovalis vertici E hinc inde vicinæ, incipiunt esse ad exteriores partes cavæ, ut mox declarabimus.

Quartus status omnia habet tertio similia, nisi quòd circà verticem E, partes aliquæ ipsius ovalis quæ ad talem statum pertinet, nempe partes illæ quæ circa verticem E proximè disponuntur, exteriùs versùs A cavæ sunt. At post aliquam distantiam hinc inde ab ipso vertice E, eadem ovalis incipit rursùs ad interiores partes versùs centrum K esse cava, nec posteà mutatur talis cavitas interior, sed durat per totum ovalis reliquum circa præcipuum verticem C; & quò minor est ratio AE ad EB, eò major est cavitas circa verticem E. Quo pacto ejusmodi ovalis aliquo modo accedit ad formam cor-

dis alicujus animalis, cum hac tamen differentia, ut pars quæ eſt circa E cava ſit exteriùs, non ad formam anguli ut cor, ſed ad formam quaſi rotundam; ut ſi fingas ovalem aliquam quæ priùs tota interiùs cava erat, ictu quodam alterius ovalis fortioris circa verticem E inflicti, retuſam eſſe ad interiores partes, ut communiter accidit corporibus rotundis debilioribus, dum in firmiora rotunda illidunt. In hac verò ovali, ſicuti & in omnibus præmiſſis, ſemper reperitur aliqua pars circa verticem E, quæ ad Dioptricam inutilis eſt, nempe uſque ad ea puncta V, 7, in quibus ductæ rectæ AV, A 7, ipſam ovalem tangunt, ut jam ſuprà ſæpiùs dictum eſt.

Quintus ſtatus dum A eſt in E; quod ad ſex locos baſium, centrorum, & intervallorum attinet, non admodùm differt à tertio & quarto ſtatu præmiſſis. Ejus verò ovalis circa verticem E exteriùs cava eſt quàm maximè. Cæterùm eadem integra ad Dioptricam utilis eſſe poteſt, eſtque prima earum quæ nullas partes habent inutiles; quæ proprietas duobus reliquis ſtatibus etiam convenit. In hoc etiam ſtatu hoc ſpeciale eſt circa locos, quòd quatuor ex illis, nempe duo loci intervallorum, ſecundus centrorum, & ſecundus baſium tangant ſe invicem, atque etiam ovalem in ipſo vertice E; unde quæ ab eodem E vel A excitatur perpendicularis ad axem CE, eoſdem quatuor locos tangit in ipſo eodem E.

In ſexto ſtatu, ovalis adhuc cava eſt circa verticem E, ſed minùs quàm in quinto in quo illa circa idem punctum E maximè cava erat; & quò major eſt ratio rectæ BE ad EA, eò minùs cava eſt eadem ovalis. In ea ſex loci reperiuntur, ſed ita ut quatuor de quibus in quinto ſtatu dictum eſt, extra ovalem excurrant ultra E; unde evaneſcit tangens AL, quam tamen refert analogicè ea recta quæ ex puncto A excitatur pependiculariter ad axem

CE;

CE; exhibet enim illa punctum L ubi secat secundum locum basium; punctum 17, ubi secat primum intervallorum; punctum 18, ubi secat secundum centrorum; & punctum 19, ubi secat secundum intervallorum, quod in septimo casu verum quoque reperitur. Sed & pro diversis rationibus refractionum in diversis mediis, atque etiam pro diversis rationibus BE ad EA, accidere potest ut evanescat tangens B 24, quæ ex puncto B educta tangebat quatuor locos, nempe duos intervallorum, primum centrorum, & primum basium, quam tamen analogicè hoc casu referet ea recta quæ ex puncto B ad axem CE perpendiculariter excitabitur, eo modo quo de tangente AL jamjam dictum est, quod quivis Geometra facilè intelliget.

At ubicunque existat hoc punctum B, sive extra quatuor illos locos; sive in vertice eorumdem, dum vertex ille est in B; sive intra ipsos, ut in hoc statu accidere potest: semper punctum B ad prædictos quatuor locos similiter positum est; ita ut duæ quæcunque rectæ ab eodem B eductæ, & vel tangentes vel secantes quatuor illos circulos, auferant ab illis totidem arcus similes, si sumantur ut sibi respondent. Eadem est ratio puncti A respectu suorum quatuor locorum, de quibus hoc & quinto statu dictum est. Unde inferre licet tam punctum A ad duos locos intervallorum simlliter positum esse, quàm punctum B ad eosdem, etiamsi positio puncti B positioni puncti A minimè similis existat.

Tandem, in septimo statu sex loci non longè aliter se habent quàm in sexto; sed ovalis circa verticem E non ampliùs cava est ad partes exteriores: verùm illa tota interiùs cava existit, nec quicquam in ea speciale reperitur quod sit alicujus momenti.

De tangentibus & rectis ad prædictas omnes ovales perpendicularibus, multa dici possent elegantissima,

quæque hanc materiam, atque adeo totam Geometriam maximè illustrarent: verùm illa ideò prætetimus, quia propriè non sunt hujus loci. Hoc tamen monebimus: In omni statu in quo puncta A & C sunt ad easdem partes respectu puncti B, sive ipsa A, C sint simul, sive illorum alterum propiùs accedat ad B, quodcunque illud sit, vel A, vel C: tunc omnem rectam quæ ad ovalem perpendicularis erit, occurrere axi ejusdem ovalis in puncto aliquo quod erit inter ipsum B & alterum ex prædictis duobus A, C, quod eidem B propinquius erit. At verò in omni statu in quo punctum B existet inter prædicta A, C, tunc omnem rectam ejusmodi quæ ad ovalem perpendicularis existet, vel axi parallelam esse, vel eidem occurrere ultra puncta A, B, nullam autem vel in ipsis punctis, vel inter ipsa. Sed de his satis: nunc ad propositam nobis materiam de locis ad analysim aptis accedamus.

De locorum divisione in diversos gradus.

Multi sunt locorum gradus, immò infiniti; alii enim simplicissimi sunt; alii autem magis ac magis compositi, idque in infinitum. Eorum tamen omnium Antiqui duo in universum genera statuerunt.

Primum genus est eorum qui solis constant lineis, sive illæ rectæ sint, sive curvæ. Ac de his sanè intelligi debet omnis sermo in quo de locis simpliciter agitur, nullo addito vocabulo quod contrarium indicet.

Secundum genus est eorum qui superficiebus constant, vocanturque illi communiter loci ad superficiem; quorum quidam per se subsistunt, nec ab aliis oriuntur; quidam contrà oriuntur sive generantur à locis simplicibus primi generis, dum illi circa axes aliquos conversi, superficies aliquas producunt.

Rursùs, primum genus locorum in tres classes communiter distribui solet, nimirùm in locos planos, in locos solidos, & in locos lineares.

Loci plani duo sunt tantùm, nempe linea recta, & circuli circumferentia.

Loci solidi tres sunt, nempe parabola, hyperbola, & ellipsis; qui ex sectione superficiei conicæ & plani alicujus quod nec per verticem coni transeat, nec basi sit parallelum, nec subcontrariè positum, originem ducunt.

Loci lineares sunt omnes aliæ quæcunque lineæ præter rectam, circuli circumferentiam,& conicas sectiones, putà conchoïdes omnis generis, spirales, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, & infinitæ aliæ, quæ tales sunt & tam multiplices, ut etiam nomine careant. Neque enim aliter comparari debent loci lineares cum locis planis aut cum solidis, quàm genus polygonorum quæ laterum multitudine triangulum aut quadrangulum excedunt, cum ipso triangulo aut quadrangulo. Nam, quemadmodum sub tali nomine polygoni continentur pentagonum, hexagonum, eptagonum, octogonum, &c. quæ omnes figuræ non minùs inter se differunt & specie & proprietatibus quàm triangulum à quadrangulo & utrumque horum à cæteris: sic sub uno nomine linearium infiniti loci continentur qui non minùs differunt inter se naturâ & proprietatibus, quàm linea recta aut circuli circumferentia à parabola, hyperbola, aut ellipsi; aut quàm hæ quinque lineæ ab iisdem locis linearibus, seu à conchoïdibus, spiralibus, cissoïdibus, &c.

At verò non omnes loci lineares ad analysim nostram apti sunt, sed illi tantùm quos ad æquationes analyticas revocari posse contingit. Quid sit autem locum aliquem ad æquationem revocare, posteà declarabimus, & exemplis illustrabimus. Nunc autem, quoniam à multis quæ-

ri ſolet an ejuſmodi loci tam plani quàm ſolidi & lineares, omnes in univerſum geometrici dici debeant; extiterunt non pauci inter Geometras vulgò habiti, qui præter locos planos, nullos alios admittebant, ac cæteros tanquam à Geometria prorsùs alienos reſpuebant, ita ut problema quodvis inſolutum exiſtimarent, quod beneficio locorum planorum ſolvi non poſſet, quantumcumque idem aut per locos ſolidos aut per lineares ſolveretur: ideò non abs re fuerit hoc loco diſquirere quid geometricum, quid verò minimè geometricum cenſeri debeat, poſitis tamen iis omnibus quæ vulgò in elementis omnibus geometricis admitti ſolent.

Sanè in univerſum, quæſtio eſt de nomine, ut manifeſtò patet: tamen, quia multi præ arrogantia, ea omnia damnare conſueverunt quæ ignorant, ne ſcilicet re quadam alicujus pretii privari videantur; ac ſic multa reſpuunt quæ à doctis communiter recipiuntur.

Ut talium ſic leviter ſub appoſitis ſuo modo falſis nominibus res bonas damnantium malitiam quivis veritatis ſtudioſus vitare poſſit, lubet rem ipſam à fundamentis reſumere, quibus intellectis, facile erit cuicunque propoſitionem aliquam geometricè aut ſecùs ſolutam, temerè affirmanti aut neganti reſpondere, atque ipſius affirmationem aut negationem falſam, levem, aut temerariam eſſe, ex ipſius ſcientiæ principiis evidenter demonſtrare.

Ac primùm omnium convenit propoſitiones arithmeticas à geometricis diſtinguere; ſiquidem illas arithmeticè, hoc eſt per operationes ſive regulas arithmeticas; has verò geometricè, hoc eſt per locos geometricos, ſolvi conſentaneum eſt, ut debito ſeu legitimo modo ſolutæ dici debeant. Neque tamen negamus utraſque operam ſibi mutuam præbere, ac ſibi invicem auxiliari, idque multipliciter; quod ideò non impedit ne arith-

metica arithmeticè, geometrica geometricè tractentur.

Arithmeticæ ergo propoſitiones ſolvuntur vel addendo, vel ſubſtrahendo, vel multiplicando, vel dividendo, vel radices extrahendo; atque id tam in numeris rationalibus ſeu unitati commenſurabilibus, quàm in numeris irrationalibus ſeu ſurdis, vel unitati incommenſurabilibus; &, ſive in numeris ſimplicibus, ſive in compoſitis ejuſmodi operationes inſtituantur, juvante ubicunque Geometria ſi opus fuerit, cujus præcipuæ partes ſunt diſtinguere atque imperare ubi & quando addere, aut ſubſtrahere, ubi & quando multiplicare aut dividere, ubi & quando radices extrahere conveniat.

Quo in opere non multùm refert utrùm ſolutio in minimis aut in ſimpliciſſimis numeris exhibeatur, vel in majoribus aut magis compoſitis; ſæpè enim accidit ut vel multiplicationes, vel diviſiones, vel radicum extractiones adeò intricatæ ſint, ut ipſas explicare nimis arduum opus ſit, nec quodpiam tantæ operæ prætium ſatis dignum exiſtat.

Neque tamen diffitendum eſt ea ingenia longè aliis prælucere, quibus datum eſt quæſtiones quaſcunque ſimpliciſſimo modo ſolvere: at illa bonis ſuis gaudeant, modò ne aliorum ſolutiones minùs ſimplices tanquam ſpurias ac minimè recipiendas, nimis arroganter damnare contendant.

In exemplo. Proponatur in numeris hæc æquatio cubica numericè ſolvenda. $B^{\text{ſolidum}} - C^{\text{plano}}$ in $A - A^{\text{cubo}} \infty O$, & $B^{\text{ſ}}$. ſit numerus infrà poſitus, nempe apotome ſicuti & C p. 729.

$$B^{\text{ſ}}.\ \text{Apotome.} \begin{cases} + & 142884 \\ - \surd q & 17962705800 \end{cases} - 729\,A - A^3 \infty O.$$

Ponamus autem quemdam vel neſcire, vel non admodum curare methodum quâ ejuſmodi æquatio breviſſi-

mo aut ſimpliciſſimo modo ſolvi queat, ſed tantùm id curare, quo modo illa utcunque ſolvatur.

Equidem ex conſtitutione illius, patet ipſam irregularem eſſe, nec de tribus lateribus explicabilem, verùm de unico tantùm, eodemque ſuprà: hoc ex noſtro opere de æquationum cubicarum recognitione, cap. 3. prop. 6. patebit.

At illius conſtitutio ex Vieta elegantiſſimè deducitur. Sunt quippe quatuor quidam numeri continuè proportionales, quorum qui continetur ſub extremis vel mediis eſt tertia pars numeri radicum, ſive tertia pars affectionis ſub A; qui numerus in noſtro exemplo eſt C. 729, & ejus tertia pars eſt 243: differentia autem extremorum eſt ille numerus qui oritur diviſo B ſ. per eandem tertiam partem numeri C. Quia ergo numerus ille ſolidus eſt hæc apotome 142884 — √ 17962705800; eo per 243 diviſo, oritur hæc alia apotome 588 — √ 304200, quæ ideò eſt differentia numerorum extremorum. Eſt autem numerus quæſitus A in eadem ſerie, differentia numerorum mediorum. Eò itaque res reducitur, ut ex quatuor numeris continuè proportionalibus, datâ differentiâ extremorum, nempe 588 — √ 304200; dato etiam producto ex mediis vel ex extremis 243, inveniatur differentia mediorum. Et extremi quidem facili viâ habentur ex data differentia ipſorum, & producto eorumdem; nam ſemidifferentia eſt 294 — √ 76050, & hujus ſemidifferentiæ quadratum eſt hæc apotome 162486 — √ 26293831200, quod additum ipſi producto 243, dat hanc aliam apotomen 162729 — √ 26293831200, cujus radix quadrata eſt dimidia ſumma extremorum √ 88200 — 273. Huic apotome ſi addas ſemidifferentiam extremorum prædictam, nempe 294 — √ 76050, fit major extremorum quæſitorum, hoc nempe binomium √ 450 + 21. Quòd ſi ex eadem apotome √ 88200 —

273, seu ex dimidia summa extremorum, demas eandem semidifferentiam extremorum 294—γ76050, sit minor extremorum quæsitorum, nempe hæc apotome γ328050—567. Hoc pacto, datis extremis, quærendi sunt duo medii proportionales, ut habeatur eorum differentia quæ dabit numerum A quæsitum.

At in quatuor numeris continuè proportionalibus, hoc universale theorema est: Productus ex majori extremo in quadratum minoris extremi est cubus minoris medii. Item, productus ex minori extremo in quadratum majoris extremi est cubus majoris medii. Hac igitur regula ex datis extremis, majori quidem γ450+21, minori autem γ328050—567, dabuntur duo cubi mediorum. Nam quadratum majoris extremi est binomium 891+γ793800: hoc multiplicatum per minorem extremum dat hoc aliud binomium γ26572050+5103, & hic est cubus majoris medii. Simili modo, quadratum minoris extremi est hæc apotome 649539—γ421857865800; hoc multiplicatum per majorem extremum dat hanc aliam apotomen γ19371024450—137781, & hic est cubus minoris medii.

Inventis ergo duobus cubis numerorum mediorum, superest ut cuborum ipsorum radices extrahantur. At verò, talium cuborum alter, nempe major, est binomium: alter autem, seu minor, est apotome; quicunque ergo artem calluerit quâ ex binomiis & apotomis cubicæ radices extrahuntur, is quæstionem, si non simplicissimo modo, at certè accuratè omninò solverit; siquidem earum radicum differentia erit numerus A quæsitus, nec alio quovis modo, quamquam simpliciori, alius invenietur numerus. Quòd si reperiatur aliquis qui talem artem ignoraverit, is postquàm cubos prædictos invenerit, ibi subsistet, ac dicet numerum quæsitum A esse differentiam radicum cubicarum talium numerorum

exhibitorum ſic $\gamma^{cub.}$ hujus binomii | γq 26572050 + 5103 | — $\gamma^{c.}$ hujus apotomes | γq 19371024450 — 137781. | Et ſanè ea dici poterit aliqua eſſe ſolutio, quoniam ipſa ad numeros certos ac determinatos reducta eſt. Adde quod plerumque accidit ut binomia aut apotomæ non habeant radices cubicas explicabiles, unde ipſarum differentia per ejuſmodi radicum extractionem exhiberi non poteſt, quamvis illa aliquando rationalis exiſtat; quò fit ut eâdem, vel aliâ viâ quærenda ſit, vel eâ ratione quâ ſuprà, per ipſos cubos irrationales exhibenda.

Verùm in propoſito exemplo, radices cubicæ à perito rectè extrahi poſſunt, quibus exhibitis ſolutio longè erit elegantior; ſunt enim radices illæ binomii quidem, hoc binomium γq 162 + 9; apotomes verò hæc, apotome γq 1458 — 27. Sint ergo hi numeri duo medii quæſiti, quorum differentia eſt hæc apotome 36 — γq 648 quæ exhibet numerum A quæſitum; quo pacto habemus hoc modo ſatis longo atque intricato, ſolutionem quæſtionis propoſitæ: atque etiamſi methodus talis ſolutionis ſimpliciſſima non ſit, tamen numerus A inventus eſt ſimpliciſſimus.

Verumenimverò ſagacior aliquis Analyſta, multò compendioſiori viâ eandem inveniet ſolutionem. Is enim ſtatim propoſitâ hâc eâdem æquatione cubica,

$$B\,ſ.\begin{cases} + \quad 142884 \\ - \gamma q\, 17962705800 \end{cases} - 729\,A - A^3,$$

animadvertet illam ad minores numeros reduci poſſe; quandoquidem datur numerus 3, cujus quadratus 9 dividere poteſt Cp ∞ 729, ita ut ejuſdem numeri 3 cubus 27 dividere quoque poſſit Bſ. 142884 — γq 17962705800; ac diviſione per quadratum oritur 81, per cubum autem oritur 5292 — γq 24640200.

Hoc

Hoc pacto dabitur alia æquatio in minoribus numeris, nempe hæc,

$$D\,s.\left\{\begin{array}{l} 5292 \\ -\gamma q\, 24640200 \end{array}\right. - Fp\, 81\, E - E^c \infty O.$$

Cujus æquationis radix E cùm inventa fuerit, ac per 3 prædictum multiplicata, dabitur prioris æquationis radix A quæsita. Est tamen hæc nova æquatio ejusdem constitutionis cum ea quæ initio proposita est; quare concludemus in ea contineri quatuor numeros continuè proportionales, ita ut numerus contentus sub extremis vel mediis sit 27 tertia pars Fp, sive numeri 81; differentia verò extremorum sit hæc apotome 196 — γq 33800; quæ oritur diviso solido D per prædictum numerum 27. Datâ autem differentiâ extremorum, & producto ab iisdem, dantur vulgari methodo iidem extremi, major nempe hoc binomium γq 50 + 7, & minor hæc apotome γq 36450 — 189. His datis extremis darentur cubi mediorum methodo superiùs traditâ; verùm, eidem Analystæ, quem ex sagacioribus aliquem supponimus, dabitur locus subtili sanè compendio; datur nempe cubus quidam numerus 27 per quem illorum extremorum alter dividi potest, putà minor sive γq 36450 — 189, quâ divisione reperitur hæc apotome γq 50 — 7; sumatur ergo talis apotome γq 50 — 7 loco minoris extremi, majore eodem semper remanente binomio γq 50 + 7, ut suprà. Hac tamen lege, ut postquàm inter illos extremos duo medii inventi fuerint, tum alter illorum minori proximus multiplicetur per 9, quadratum scilicet numeri 3, cujus cubus 27 divisor fuerit minoris ipsius extremi, nempe γq 36450 — 189: alter autem eorumdem inventorum mediorum ab extremo minore diviso remotior, multiplicetur per 3 radicem ejusdem cubi 27 divisoris; hac enim duplici multiplicatione dabuntur veri duo medii inter duos extre-

mos quos ex ſecunda æquatione præmiſſa ad minimos numeros reducta deduximus, nempe inter binomium $\sqrt{50}+7$, & apotomen $\sqrt{36450}-189$.

Reſumamus ergo duos minimos extremos ultimò inventos poſt diviſionem per cubum 27, qui ſunt $\sqrt{50}+7$, & $\sqrt{50}-7$, inveniamuſque inter eoſdem, duos medios continuè proportionales.

Rursùs autem hîc quiddam accidit notandum. Nam ſi quis per traditam ſuprà regulam, datis extremis, quærat cubos duorum mediorum, is inveniet tales cubos eſſe eoſdem ipſos extremos: quod ideò accidit, quia binomium & apotome quæ ipſos extremos conſtituunt, iiſdem conſtant nominibus; ac prætereà quadrata ipſorum minum unitate tantùm differunt, quod quoties accidit, toties duo extremi ſunt cubi duorum mediorum, unuſquiſque ſcilicet illius qui ſibi proximus eſt.

Habeantur ergo duorum illorum extremorum radices cubicæ; binomii quidem, ſive $\sqrt{50}+7$, hoc binomium $\sqrt{2}+1$: at apotomes, ſive $\sqrt{50}-7$, hæc apotome $\sqrt{2}-1$; atque ita tandem habebimus quatuor continuè proportionales,

$$\sqrt{50}+7, \mid \sqrt{2}+1, \mid \sqrt{2}-1, \mid \& \sqrt{50}-7,$$

in numeris multò minoribus quàm anteà. Quòd ſi intacto primo, ut ſuprà decrevimus, ſecundum illorum multiplicemus per radicem 3, tertium verò per ejus quadratum 9, at quartum per cubum 27, qui anteà diviſor extitit, habebimus quatuor illos proportionales qui ad æquationem de E ſuperiùs expoſitam, pertinent, quorum primus erit in utraque ſerie idem $\sqrt{50}+7$; ſecundus $\sqrt{18}+3$; tertius $\sqrt{162}-9$; & tandem quartus, $\sqrt{36450}-189$. Horum quatuor, differentia mediorum eſt $12-\sqrt{72}$; is autem eſt numerus E quæſitus in æquatione, qui numerus, ſi tandem per 3 multipli-

cetur, per eum ſcilicet numerum cujus beneficio depreſſa eſt ſuprà æquatio de A, & ad æquationem de E reducta: dabitur numerus A quem initio quærebamus; & is erit idem qui anteà $36 - \sqrt{q}\,648$, ſed multò breviori multòque ſimpliciori methodo inventus, propter quam tamen non eſt quòd, qui illam calluerit, nimiùm arroganter ſuperbiat.

Hîc quærere poſſet aliquis, an detur certa aliqua regula quâ dignoſcamus num binomia aut apotomæ radices habeant cubicas explicabiles, & quomodo illæ eruantur.

Sciat igitur ille talem dari regulam, quam non abs re fuerit paucis indicare. Ac primùm, ponamus binomium aut apotomen propoſitam, eſſe primi vel ſecundi, quarti vel quinti ordinis, tum ſic fiet:

Ex quadrato majoris nominis dematur quadratum minoris, ac tum ſi differentia reperiatur eſſe cubus numerus habens radicem minimè ſurdam, ſed unitati commenſurabilem, benè eſt, nec alia præparatione eſt opus: ſin ſecùs, tunc aliqua præparatione utendum eſt, de qua dicemus poſteà. Ponamus ergo prædictam differentiam habere radicem cubicam, quæ radix vocetur B planum; at majus nomen binomii aut apotomes, vocetur M ſolidum; minus autem vocetur N ſolidum: tum alterutra ex ſequentibus duabus æquationibus cubicis ſolvatur, nempe

$$\tfrac{1}{4}\,M\,ſ. + \tfrac{3}{4}\,B\,p.\,A - A^3 \propto O,$$
$$\text{vel } \tfrac{1}{4}\,N\,ſ. - \tfrac{3}{4}\,B\,p.\,A - A^3 \propto O:$$

prior quidem, ſi binomium vel apotome primi vel quarti ordinis extiterit; poſterior autem, ſi ſecundi vel quinti. Talis autem æquationis radix reperiri debet eſſe numerus minime ſurdus, atque ideò inventu facillimus. Quòd ſi illa radix non reperiatur eſſe rationalis, ſeu

unitati commensurabilis, tunc certò pronuntiare licebit, binomium aut apotomen non habere radicem cubicam explicabilem. Esto ergo illa cubicæ æquationis radix numerus rationalis integer vel fractus, tunc illa priori quidem æquatione erit majus nomen, à cujus quadrato si dematur B planum, relinquetur quadratum minoris nominis, ex quibus nominibus constituetur binomium vel apotome: atque hæc vel illud erit radix cubica quæsita. At secunda æquatione radix erit minus nomen, cujus quadrato si addatur B planum, fiet quadratum minoris nominis; atque ab illis nominibus constitutum binomium vel apotome, erit radix cubica quæ quæritur.

Jam verò existente binomio vel apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, quadrata nominum non differant cubo numero, sed quocunque alio: tunc hac præparatione utemur. Differentia illa quæ cubus non est, vocetur C ss., ac per eandem differentiam multiplicetur utrumque propositorum nominum binomii vel apotomes cujus radix investigatur, putà M f. & N f.; hac enim multiplicatione habebimus binomium aliud vel aliam apotomen ejusdem ordinis, cujus quadrata nominum cubo numero different. Atque omninò non refert quis sit multiplicator per quem multiplicentur nomina M f. & N f. modò quadrata nominum inde ortorum cubo numero differant; is ergo multiplicator, quicunque ille sit, vocetur C ss. sive ille sit idem qui suprà, sive non; est tamen primus communiter simplicissimus.

Talis ergo binomii vel apotomes tali multiplicatione constitutæ radix cubica inveniatur ea methodo quam jamjam tradidimus mediante æquatione cubica convenienti: tum radix inventa dividatur per C p. hoc est per radicem cubicam C ss. quæcunque sit illa radix, surda, vel rationalis; quotiens enim talis divisionis dabit radicem cubicam initio quæsitam.

Ponamus tandem propositum binomium vel apotomen, esse tertii vel sexti ordinis; atque, ut suprà, majus nomen esto $M^{f.}$ minus autem $N^{f.}$; & $C^{ff.}$ esto differentia quadratorum nominum ipsorum. Tum inveniatur numerus aliquis $D^{ff.}$, qui multiplicans $C^{ff.}$ faciat cubum, multiplicans autem vel $M^{ff.}$, vel $N^{ff.}$ faciat quadratum: (dantur infiniti tales numeri, & facilè inveniuntur) ac per $D^{f.}$, hoc est per radicem quadratam numeri $D^{ff.}$, multiplicetur utrumque nominum $M^{f.}$ & $N^{f.}$; tali enim multiplicatione orietur aliud binomium vel alia apotome primi, secundi, quarti, vel quinti ordinis, cujus quadrata nominum different cubo numero; illius ergo radix cubica (si illa explicabilis sit) habebitur per præmissam regulam mediante congruenti æquatione cubica; ut dictum est: hæc ergo radix cubica divisa per D, hoc est per radicem solido-solidam, seu cubo-cubicam numeri $D^{ff.}$, dabit radicem cubicam binomii vel apotomes, cujus nomina sunt $M^{f.}$ & $N^{f.}$, quam invenire propositum erat.

Plurima super hac re dici poterant; sed nos regulam pulcherrimam indicare duntaxat, non minutatim persequi voluimus, & quæ dicta sunt sufficient Analystæ non omnino rudi ad cætera detegenda.

Nec est quòd quis dicat, hoc modo proponi obscurum per obscurius explicandum, dum inventionem radicis cubicæ alicujus binomii vel apotomes ad resolutionem æquationis cubicæ reducimus. Quandoquidem enim talis æquationis solutio reperiri debet numerus rationalis integer vel fractus (aliàs enim, si surdus existat non erit radix binomii vel apotomes explicabilis) non aliter, nec majori difficultate solvetur æquatio illa, quàm simplex divisio absolvenda esset; quod sanè callere debet quicunque Analysim vel mediocriter coluerit. Legatur Vieta lib. de Æquationum recognitione &

emendatione, ac præcipuè capite illo quo æquatio ſic tranſmutari poteſt, ut coefficiens ſit quæ præſcribitur: ſtatuatur enim coefficiens unitas; tum verò ſolidum comparationis erit cubus aliquis ſuo latere auctus vel mulctatus: cætera plana ſunt, unde nihil ultrà addemus.

Hoc exemplo ſatis declaravimus quid requiratur ad hoc ut problema aliquod arithmeticum arithmeticè ſolutum dici poſſit: qua de re tantis operibus egerunt Vieta, Cardanus, Bombellius, Tartalia, & alii quidam illuſtres præteriti ſæculi viri, inter quos longè excelluit ipſe Vieta, dum talium problematum ſolutionem, non quidem ſingularem pro ſingulis problematis, ſed univerſalem pro qualibet ſpecie problematum, per ſpecies ad id à ſe inventas inquiſivit.

Neque abs re fuerit Analyſtam monere, quæſtionem omnem in numeris propoſitam, in qua ex datis quibuſdam numeris, alius aliquis numerus quæritur ſecundùm leges quaſdam in eadem quæſtione præſcriptas, ſemper eſſe quæſtionem ſingularem; atque etiamſi illa ad æquationem analyticam revocata, ad æquationes cubicas, aut ad altiores pertinere videatur: tamen non temerè ſtatim pronuntiandum eſſe, talem quæſtionem ſolidam eſſe aut linearem, ſæpiſſimè enim accidit, ut illa vi inductionis logicæ plana ſit; dico vi inductionis logicæ, quoties ſcilicet ſolutio illius datur in numeris qui logicâ inductione initâ, neceſſariò reperiuntur. Ut ſi experiar num æquatio aliqua de unitate ſit explicabilis, num de binario, num de ternario, de quaternario, quinario, ſenario, &c. neque enim in infinitum abit tale experimentum, quandoquidem, ex hypoteſi, numeri in ipſa æquatione expreſſi ſunt, qui radicem quæſitam intra certos ac præfinitos terminos coercent. Aut ſi certâ aliquâ conjecturâ deprehenderim illam, non de integro numero, ſed de fracto explicabilem eſſe, cujus numeri

fracti denominator ex recognitione ipsius æquationis innotescat : tum inductione factâ, quæram numeratorem binarium, ternarium, quaternarium, quinarium, senarium, septenarium, &c. donec illum invenero, qui experiundo satisfaciat propositæ quæstioni; neque enim rursùs in infinitum abit tale experimentum. Eodem modo, si ex recognitione talis æquationis deprehendero ipsam nec de integro numero nec de fracto explicari posse, sed de surdo aliquo, cujus tales ex ipsa recognitione innotescant conditiones, ut ille, quamquam surdus, inductione factâ detegi possit : tales omnes æquationes planæ censeri debent, non autem solidæ aut lineares, sub quarum specie aliquâ contineri primo intuitu apparuerunt. Ac planè talis existit præmissa æquatio cubica numerica, in qua satis jamjam immorati sumus, quæ tamen prima fronte alicui minùs perito Analystæ, solida quædam quæstio ex iis quæ insolubiles vulgò censentur, potuit apparere.

Nunc ergo ad geometriam redeamus, & quid geometricum sit, aut censeri debeat explicemus. Geometricum in universum vocamus quodcunque intelligibile est in materia geometrica, nullâ habitâ ratione sensuum externorum, putà visus, auditus, tactus, gustus, vel olfactus, nisi quatenùs illi intellectum movere possunt ad suas operationes exercendas. Verbi gratiâ, dum species visibilis circuli alicujus materialis in oculum incidens visum movet, illa ex occasione causa esse poterit cur intellectus ab illo sensu excitatus talem figuram considerandam suscipiat, ac multas easque insignes proprietates detegat, atque evidenter ex certis atque indubitatis principiis demonstret. Ejusmodi igitur cognitio ab intellectu elicita, atque in ipso intellectu residens tanquam species aliqua intellectiva circa materiam geometricam, est id quod geometricum appellamus.

Materia verò gemetrica eſt omne extenſum quatenùs extenſum, & quidquid ad illud pertinet ſub eadem ratione; quales ſunt termini illius, quales figuræ, quales rationes & portiones magnitudinum ad invicem, & ſi quid aliud ad tale argumentum pertineat. Itaque lineæ omnes, omneſque ſuperficies quæ certis atque intellectu planè perceptis regulis deſcribuntur, omninò geometricæ ſunt, ſicuti & figuræ quæcunque talibus lineis, ac talibus ſuperficiebus continentur. Nec refert quòd illæ omnes lineæ, ſuperficies, & reliquæ, mediante motu aliquo vel ſimplici vel compoſito, ut plurimùm ſub intellectum cadant. Nam primùm, motus ille, ſive ſit puncti alicujus, ad lineam aliquam deſcribendam, ſive ſit alicujus lineæ ad deſcribendam ſuperficiem, ſive ſuperficiei ad ſolidum deſcribendum, eſt ſimpliciter intelligibilis; non autem ſenſu externo perceptibilis, niſi quatenùs ad meram praxim refertur, quæ ſenſus externos reſpicit, nec ad puram geometriam, hoc eſt purè intelligibilem, reducitur; ſed & puncta, lineæ, aut ſuperficies quæ moveri intelliguntur, purè ſunt geometricæ, abſtrahuntque à materia ſenſibili; & per ſpatium purè geometricum, atque à materia ſenſibili abſtructum, motus ſuos perficere intelliguntur, tranſeuntque à termino noto ad notum terminum per notum medium, ſecundùm leges notas, & clarâ ac diſtinctâ intellectus notione, aut firmo ratiocinio ſtabilitas; aliàs enim, niſi has ſortiantur conditiones, illæ tanquam ſpuriæ, atque à Geometria prorsùs alienæ reſpuuntur.

Secundò, etiamſi, qui rerum geometricarum minùs periti ſunt, putent lineas, ſuperficies, & ſolida, motu punctorum, linearum, & ſuperficierum reverà gigni, ita ut iidem exiſtiment magnitudines illas tum primùm eſſe incipere, cùm primùm à tali motu producuntur: tamen ei qui rem penitùs inſpexerit, manifeſtò patebit illam longè aliter ſe habere; quippe, poſito tantùm ſpatio geometrico omnimo-

dè

dè extenso, (illud autem spatium, etiam nemine cogitante, in rerum natura ponitur) ponuntur statim tales magnitudines in tali spatio, etiam nemine cogitante & abstrahendo ab omni motu, atque omnes simul in ipso existunt absque omni intellectus operatione. At motus ad hoc inservit, ut per omnes partes ipsarum magnitudinum intellectum successivè perducendo, illum faciliùs ad earumdem cognitionem pertrahat. Sic enim comparatus est humanus intellectus, ut vix quippiam, præcipuè si extensum est, simul ac totum apprehendat, sed tantùm successivè ac per partes; quod sanè est motu intellectivo moveri per tale extensum, nec tamen illud motu ipso in rerum natura ponitur, sed tantùm eodem mediante intelligitur, cùm priùs absque omni motu, atque ab intellectu independenter extaret.

Cùm ergo Euclides sphæram, conum, ac cylindrum; cùm Apollonius superficiem conicam; cùm Archimedes sphæroïdem, conoïdem, & helices; cùm alii conchoïdes, cissoïdes, quadratrices, trochoïdes, atque innumeras ejusmodi lineas & figuras per motus describunt; immò quidam lineam rectam per motum puncti, & circulum per motum rectæ lineæ: illi omnes sic intelligendi sunt, ut voluerint magnitudines ipsas priùs existentes, eodem modo quo à se conciperentur, aliorum intellectui exponere, seu ostendere; quod cùm aliter faciliùs non possent, hoc modo per motus, vel simplices, vel compositos omninò feliciter effecerunt.

Rursùs, quòd quædam lineæ aut quædam superficies, beneficio instrumentorum mechanicorum faciliùs describantur, quædam difficiliùs, id non facit ut illæ magis, hæ minùs sint geometricæ: ejusmodi enim mechanicæ descriptiones praxim respiciunt, & ad sensus externos referuntur, non autem ad puram Geometriam, quæ, ut sæpè diximus, solum respicit intellectum.

Quòd etiam ex iisdem lineis aut superficiebus, quædam simpliciores, quædam verò magis compositæ intellectui videantur; id etiam non impedit quin hæ & illæ æquè geometricæ dici debeant; quippe illud non ex natura talium magnitudinum, sed ex debilitate intellectus humani procedere manifestum est: ex nostra autem imperfectione rerum natura non immutatur.

Demus itaque hoc humanæ imbecillitati, quòd quæ simpliciori modo, saltem nostro respectu, solvi poterunt, eo solvi debeant; & contra talem regulam peccasse censeatur quisquis, cùm simpliciori loco uti posset, ad magis compositum recurrerit. Dicemus autem paulò pòst de distinctione locorum in magis aut minùs simplices ex constitutione Geometrarum qui nos hac in re præcesserunt, ut sic quis cuique quæstioni locus proprius sit innotescat.

Sed ut magis elucescat in hac materia locorum, nec facilitatem descriptionis, nec majorem aut minorem simplicitatem intellectionis alio modo attendendam esse quàm respectu imbecillitatis intellectus humani: videamus quis sit Geometriæ finis in locis ipsis constituendis. Constat autem nullum alium finem apud Geometras reperiri, nisi ut talium locorum beneficio ea detegant quæ intellectui latebant, ut quod verum est, verum esse; quod falsum est, falsum esse; quod fieri potest, fieri posse, & quo modo, & quot modis, manifestum fiat, idque semper in materia geometrica; quod ramen non impedit ne talis cognitio posteà materiæ sensibili applicetur. Ac planè ejusmodi loci primò & per se quædam sunt cognoscendi instrumenta; secundariò verò, & per applicationem mechanicam, illi sunt instrumenta faciendi. Et quidem, quòd ad cognitionem, scientiam, vel intelligentiam attinet, sive illa faciliùs, sive difficiliùs acquiratur, & sive per media simplicia, sive per compo-

ſita, modò talia media ſint clarè ac diſtinctè nota, qualia ſunt quæ principiis purè geometricis innituntur, ita ut ab ejuſmodi principiis incipiendo, & per media ipſa progrediendo, tandem ad intelligentiam illam deveniamus: certum eſt eandem fore perfectam, nec in genere intelligentiarum aut ſcientiarum, perfectiorem fore aliam, quamquam facilioribus aut ſimplicioribus mediis acquiſitam. Atque omninò una eademque intelligentia ſeu ſcientia eſt, ſed diverſis mediis acquiſita; quæ media, ſi faciliora aut ſimpliciora ſint, vel ſecùs, hoc ex debilitate intellectus humani repetendum eſt; aliàs enim, ſi perfecta eſſet humana intelligendi potentia, tunc vel mediis non egeremus, vel certè & principia cognitionis, & media omnia, ſed & ipſam cognitionem uno intuitu, nullo prorsùs labore nullaque difficultate haberemus, nec ſimplicis aut compoſiti ulla eſſet ratio.

Jam verò, ſi ad materiam ſenſibilem, ſeu ad praxim mechanicam applicetur cognitio aliqua geometrica, ita ut inde oriatur opus aliquod externum ex tali materia conſtans, multò minùs media aut operandi rationem accuſabimus in ipſo opere jam confecto, ſi illud his aut illis mediis æque benè abſolutum ſit; nec ullo jure tali reſpectu quis dixerit hæc aut illa media eſſe reſpuenda tanquam erronea ac minimè legitima, ſed tantùm alia aliis eſſe præferenda; quippe faciliora difficilioribus, & ſimpliciora magis compoſitis: quod ſanè ex noſtra agendi debilitate rursùs repetendum eſt; ſecus enim, poſitâ perfectâ agendi potentiâ, tunc agens & media & opus ipſum nullo labore conſequeretur, ac proinde nec facilitatis nec difficultatis, ſicuti nec ſimplicioris nec magis compoſiti ratio haberetur.

Propoſitum locum geometricum ad æquationem analyticam revocare, & qui ſimpliciores ſint loci, aut ſecùs, explicare.

Dicitur locus aliquis geometricus ad æquationem analyticam revocari, cùm ex una aliqua, vel ex pluribus ex illius proprietatibus ſpecificis, quædam deducitur æquatio analytica, in qua una vel duæ vel tres ad ſummum ſint magnitudines incognitæ.

Ac duplici quidem modo talis locus ad talem æquationem revocari poteſt. Primus modus abſolutus eſt, alter reſpectivus.

Modus abſolutus dicitur ille in quo unicus proponitur locus per ſe abſolutè ac nullo aliorum reſpectu conſiderandus, ita ut æquatio ex eo deducta ad ipſum præcisè pertineat, non verò ad ullum alium.

Modus reſpectivus ille eſt in quo duo communiter, aliquando etiam, ſed rarò, tres vel plures loci proponuntur inter ſe comparandi, ut ex eorum ſectione, vel tactione, vel datâ aliquâ diſtantiâ, vel omninò ex præſcripta aliqua conditione, vel inter ipſos habitudine deducatur æquatio aliqua analytica quæ ad omnes iſtos locos ſimul tali reſpectu pertineat; ita tamen ut nihil referat ſi æquatio illa ad alios etiam locos pertinere poſſit.

Et hi quidem modi ambo admodum univerſales ſunt, continentque ſub ſe ſinguli infinitos particulares modos, non ſolùm habita ratione multitudinis locorum geometricorum qui & genere, & ſpecie, & numero infiniti ſunt, ſed etiam in unico ex talibus locis dantur plerumque innumeri tales modi, ex quorum ſingulis innumeræ æquationes deduci poſſunt; ſiquidem tot dabuntur modi particulares, quot dabuntur diverſæ loci illius proprietates ſpecificæ; unde numerus talium modorum

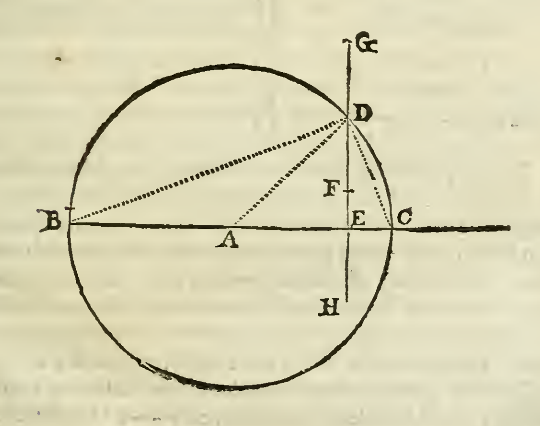
non magis finitus eſt, quàm artificis in indagandis proprietatibus vis & induſtria; ſed & ex infinita locorum ipſorum complicatione, id eſt, ſectione, tactione, &c. innumeri etiam oriuntur modi reſpectivi, ſiquidem duorum tantùm diverſimodè complicatorum modi nullo certo aliquo numero comprehendi poſſunt.

At verò, etiamſi nullus ex talibus modis ad noſtrum inſtitutum inutilis dici poſſit, ſi ſcilicet ad abundantiam doctrinæ reſpiciamus: tamen ſi neceſſitatis tantùm ratio habeatur, pauciſſimi ſufficiunt, iique non admodùm intricati aut difficiles exiſtunt.

Dicamus ergo pauca, primùm de modo abſoluto, tum de reſpectivo, atque utrumque, ſelectis aliquibus exemplis ex locis nobilioribus deſumptis, illuſtremus.

De Circulo.

Proponatur ergo primùm circulus cujus centrum ſit A, circumferentia BDC, & ſit una dia-



metrorum BC, ad quam referre oporteat omnia circumferentiæ puncta, mediante aliqua æquatione analytica; ac fundamentum hujus relationis esto proprietas illa, quòd omnis recta, putà DE, cadens à circumferentia in diametrum ad rectos angulos, sit media proportionalis inter portiones diametri BE, EC; hæc ergo proprietas specifica dabit unum aliquem ex modis particularibus circa circulum. Ex illo modo innumeræ deducentur æquationes, quales sunt quæ sequuntur.

Prima Æquatio.

AB esto	b,	Item AB esto	b,
DE	a,	DE	a,
DE quadratum	a^2,	DE quadratum	a^2,
BE	e,	CE	e,
EC	$2b - e$,	BE	$2b - e$,
BEC rectang.	$2be - e^2$.	BEC rectang.	$2be - e^2$.
Ergo æquatio,		Unde æquatio erit ut suprà,	
$+2be - e^2 \propto a^2$, vel $+2be - e^2 - a^2 \propto 0$.		$+2be - e^2 - a^2 \propto 0$.	

Itaque propositâ lineâ curvâ BDC, atque ab eadem in aliquam rectam utrinque terminatam BC, demissâ perpendiculari DE; si talis reperiatur æquatio qualem jam invenimus: tum pronuntiare licebit ejusmodi curvam esse circuli circumferentiam; est enim reciproca proprietas, & simpliciter converti potest quæ de illa concipitur propositio, ut satis facilè consideranti apparebit. Omnis autem recta data referre poterit $2b$.

Quòd si loco circumferentiæ circuli assumpta esset ellipsis; tum sub iisdem speciebus, $2be - e^2$ fuisset ad a^2

in data ratione majoris aut minoris inæqualitatis, nempe ut tranſverſum latus ad rectum, quam rationem ſupponimus eſſe datam. Converſa etiam vera eſt.

Rursùs, ſi DE in BC incidiſſet ad angulos obliquos, reliquis ut ſuprà poſitis, in omni ratione haberetur ellipſis. Sed hæc ex conicis clara ſunt.

Secunda Æquatio.

Iiſdem poſitis: ex DE detrahatur data EF quæ vocetur c, & DF vocetur i, atque ideò DE quadratum erit $+ c^2 + 2ci + i^2$. Unde iiſdem veſtigiis inſiſtendo, talis erit æquatio, $+ 2be - e^2 \propto c^2 + 2ci + i^2$, vel $- c^2 \begin{matrix} + 2be - e^2 \\ - 2ci - i^2 \end{matrix} \propto o.$

Itaque ex tali vel ſimili æquatione concludemus circuli circumferentiam: immò, ſi $+ c^2 + 2ci + i^2$ vocetur una ſpecie a^2; (ſpecies enim illa de i quadrata eſt) tunc in primam æquationem omninò incidemus, ut manifeſtum eſt. Viciſſim, facile erit ex prima in hanc ſecundam devenire.

De ellipſi eadem quæ ſuprà enuntiabimus.

Hæc æquatio non eſt reciproca, unde eam in ordinem non reduximus; ſiquidem ex illa non minùs ellipſim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet: quod etiam infrà ſatis patebit.

At verò ad tales æquationes reducetur alia quæ ſequitur $+ 2be - u^2 \propto o$, intelligatur enim u^2 majus eſſe quàm e^2 & differentia eorum vocetur a^2. Fiet ergo manifeſtò hæc æquatio $+ 2be - e^2 - a^2 \propto o$, & hæc eſt prima præcedentium, ex qua ad ſecundam facilè deducemur. Hîc autem longitudo u æqualis erit rectæ BD, vel CD, cujus quadratum æquale eſt, vel duobus quadratis BE, DE ſimul, vel duobus CE, DE ſimul, quandoquidem ipſum u^2 æquale ponitur eſſe duobus ſimul $a^2 + e^2$.

Tertia Æquatio.

Iisdem positis, eidem DE addatur in directum quævis DG; & tota EG data sit sub specie c, & DG ignota vocetur i; atque ideò DE quadratum erit $c^2 - 2ci + i^2$. Unde iisdem vestigiis, $+2be - e^2 \propto c^2 - 2ci + i^2$, vel per antithesim, $-c^2 \begin{matrix} +2be - e^2 \\ +2ci - i^2 \end{matrix} \propto o$.

Ex tali ergo vel simili æquatione concludemus circulum.

Quòd si recta DG sit data sub specie c, & EG ignota vocetur i: tunc iisdem vestigiis in eandem prorsùs æquationem incidemus. Idem accidet, si DE producatur versùs E in H, & vel tota DH sit c, EH autem sit i, vel è contrario, EH sit c, DH autem sit i.

Jam, vel $c - i$, vel $i - c$ esto a; quo pacto dabitur prima æquatio, ut manifestum est.

Sicut autem secta est DE in F, vel producta in G vel H: sic potuit secari vel produci CE, & vel ipsâ solâ manente DE insectâ & sine productione, vel etiam utraque tam CE quàm DE; quod satis per se atque ex præmissis clarum est. Idem de BE quàm de CE dictum esto.

Quarta Æquatio: ex eo quòd omnes rectæ à centro circuli ad ejus circumferentiam ductæ, sint æquales.

Iisdem positis, esto AE ignota sub specie y; & quoniam AD seu AB est b, & DE est a, ideò talis erit æquatio, $b^2 \propto a^2 + y^2$, sive $b^2 - a^2 - y^2 \propto o$. Itaque, ex ejusmodi æquatione concludemus circulum, quia illa reciproca est.

Jam verò, ut suprà, esto a æqualis, vel $c + i$, vel $c - i$, vel

vel $i - c$, prout ſcilicet vel EF erit c, & DF erit i; vel EG erit c, & DG erit i; vel DG erit c; & EG erit i: tumque habebimus alterutram ex duabus ſequentibus æquationibus $\begin{matrix}+b^2\\-c^2\end{matrix} - 2ci \begin{matrix}-i^2\\-y^2\end{matrix} \propto o$, vel $\begin{matrix}+b^2\\-c^2\end{matrix} + 2ci \begin{matrix}-i^2\\-y^2\end{matrix} \propto o$: ex quibus circulum quoque concludere licet, modò ſub ſimilibus ſpeciebus proponantur; ſic enim illæ ſunt reciprocæ, ſeu ſpecificæ.

Eodem modo hìc AE ſecari vel produci poterit quo ſuprà dictum eſt de ED, BE, vel CE.

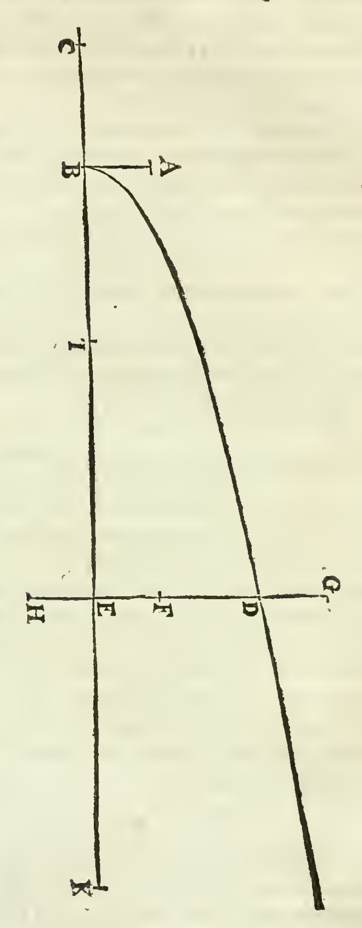
Quòd ſi proponatur aliqua ex his tribus $+d^2 - fi - u^2 \propto o$, vel $+d^2 + fi - u^2 \propto o$, vel $-d^2 + fi - u^2 \propto o$: tunc licebit illas ad alterutram ex duabus præmiſſis poſtremis reducere. Nam $+d^2$ intelligetur æquale eſſe $\begin{matrix}+b^2\\-c^2\end{matrix}$, vel $-d^2$ æquabimus $\begin{matrix}+b^2\\-c^2\end{matrix}$; at $+u^2$ ponemus æquale eſſe $\begin{matrix}+i^2\\+y^2\end{matrix}$: unde ſequetur id quod propoſitum eſt.

Non ſunt tamen illæ tres reciprocæ; ſiquidem ex illis non minùs ellipſim, parabolam, aut hyperbolam, quàm circulum concludere licet. Licebit autem quartam hanc æquationem ad primam aut ad duas ſequentes reducere, poſito quòd $b - y$ ſit e, ut ſatis patebit ei qui attendere voluerit. Et reciprocè, tres priores poterunt ad quartam reduci, poſito quòd $b - e$ ſit y.

Hæc de circulo ad æquationem analyticam reducto, pauca quidem, ſed ea præcipua ſufficiant. Nunc pauca etiam de parabola dicamus.

De Parabola.

Esto parabola BD, cujus latus rectum ſit AB, diameter BE, ſive illa ſit axis, ſive non; atque ad hanc diametrum ordinatim applicata ſit DE. Oporteat


C
A
B
I
G
H
E
F
D
K

autem omnia parabolæ puncta referre ad diametrum BE, mediante aliquâ æquatione analyticâ, ac fundamentum relationis eſto proprietas illa, quòd quadratum applicatæ cujuſvis, putà DE, æquale ſit rectangulo contento ſub latere recto AB & ſub BE portione diametri interceptâ inter verticem B & ordinatam DE; quæ proprietas parabolæ ſpecifica eſt, dabitque modum unum particularem ex quo multæ deducentur æquationes, quales ſunt quæ ſequuntur.

Prima Æquatio.

AB eſto	b,
DE	a,
DE quadratum	a^{2},
BE	e,
ABE rectangulum	be.

Æquatio,

$$be \infty a^{2},$$

vel

$$be - a^{2} \infty o.$$

Itaque, propoſitâ curvâ aliquâ BD, atque in ea ſumpto quovis puncto D; tum ductâ quâpiam rectâ BE quæ ad unas quidem partes B terminetur ad eandem curvam, ad alteras autem partes ſit indefinita: ſi ducta recta DE datæ cuipiam rectæ terminatæ AB parallela, media proportionalis ſit inter AB, BE: pronuntiabimus curvam illam eſſe parabolam. Eſt enim reciproca proprietas, ex vi hypotheſis, quòd DE ſit ſemper datæ parallela; aliàs enim poſſet æquatio præmiſſa circulum exhibere, ut notatum eſt ad ſecundam circuli æquationem, dum propoſita eſt æquatio $2be - u^{2} \infty o$. Hoc autem planè manifeſtum eſt.

Secunda & tertia Æquatio.

Nec aliter habebuntur ſecunda & tertia æquatio, quàm in circulo dictum eſt, diviſâ ſcilicet DE in F, aut

eâdem productâ in G vel H; quo pacto talis erit secunda æquatio $be \propto c^2 + 2ci + i^2$, vel $- c^2 + be - 2ci - i^2 \propto o$, atque id ex divisa DE.

Tertia autem æquatio ex DE productâ talis erit $be \propto + c^2 - 2ci + i^2$, vel $- c^2 + be + 2ci - i^2 \propto o$.

Et hæ quidem omnes æquationes sub speciebus exhibitis sunt reciprocæ, existente rectâ DE datæ alicui rectæ semper parallelâ; unde ex quavis illarum parabolam concludere semper licebit, speciebus tamen immutatis.

Quòd si recta BE dividatur in I, vel eadem producatur, sive versùs B in C, sive versùs E in K, reliquis eodem modo quo suprà positis, multæ inde orientur æquationes, quædam scilicet manente DE indivisa ac sine productione, reliquæ autem ipsâ DE divisâ vel productâ. In exemplo enim esto BE divisa, ac BI esto data sub specie d, IE autem esto y; unde rectangulum sub AB, BE, quia æquale est duobus simul, ei scilicet quod continetur sub AB, BI, & ei quod continetur sub AB, IE, talem induet speciem $bd + by$: itaque positâ DE indivisâ sub specie a, talis erit æquatio $bd + by \propto a^2$, vel $bd + by - a^2 \propto o$. At positâ DE divisâ sub specie $c + i$, æquatio erit ejusmodi $bd + by \propto c^2 + 2ci + i^2$; vel $bd - c^2 + by - 2ci - i^2 \propto o$. Quod si CB sit data sub specie d, CE autem sit y, erit ipsius BE species $y - d$: contrà autem, si CE sit d, & CB sit y, erit ipsius BE species $d - y$; hinc autem facile erit reliquas æquationes deducere, atque ex singulis, sub iisdem speciebus, parabolam concludere.

Ad prædictas autem æquationes reduci poterunt quæcunque ad circulum suprà, tam directè quàm indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur: at propter talem permutationem, æquationes illæ erunt

reciprocæ. Sed hoc indicaſſe ſufficiat; nunc ad hyperbolam progrediamur.

De Hyperbola.

Ex infinitis modis quibus hyperbola aliqua ad rectam quandam referri poteſt, duo videntur præcipui: alter quidem, cùm illa ad aliquam ex ſuis diametris refertur; alter autem, cùm illa refertur ad unam ex ſuis aſymptotis.

Eſto hyperbola BD, cujus vertex ſit B, rectum latus AB, tranſverſum BC, centrum L in medio ipſius BC, cæteris ut ſuprà in parabola poſitis. (Vide figuram parabolæ, & finge eſſe hyberbolam) niſi quod diſtinctionis gratiâ, ſpecies tranſverſi lateris hîc erit f, unde CEB rectanguli ſpecies erit $fe + e^2$. Eſt autem in omni hyperbola tale rectangulum ad quadratum cujuſvis ordinatæ DE ut tranſverſum latus ad rectum: in ſpeciebus ergo, ut f ad b, ita $fe + e^2$ ad a^2. Ductis itaque extremis inter ſe, tum etiam mediis inter ſe, fiet æquatio univerſalis ad omnem hyperbolam pertinens.

Prima Æquatio.

$bfe + be^2 \propto fa^2$, ſive $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$.

Ex tali igitur æquatione concludemus hyperbolam cujus latus rectum erit b, & tranſverſum f, exiſtente a ordinatâ ad diametrum, e verò intercepta inter ordinatam & verticem, ſive diameter ſit axis, ſive non, prout angulus ad E rectus erit vel obliquus.

Secunda Æquatio.

Secunda æquatio ex diviſa DE in F, ita ut ſpecies

recɛæ DE ſit $c + i$, talis erit, $bfe + be^2 \propto fc^2 + 2cfi + fi^2$, ſive $- fc^2 + bfe + be^2 - 2cfi - fi^2 \propto o$.

Tertia Æquatio.

Tertia æquatio ex DE producɛâ in G vel H, ita ut ſpecies ipſius DE ſit $c - i$, vel $i - c$, talis erit $bfe + be^2 \propto fc^2 - 2cfi + fi^2$, ſive $- fc^2 + bfe + be^2 + 2cfi - fi^2 \propto o$.

Poterit autem non tantùm recɛa BE, ſed etiam recɛa DE, vel utraque dividi, vel produci; unde multæ naſcentur æquationes magis intricatæ, quas, quia vix utiles eſſe poſſunt, curioſo Analyſtæ relinquimus.

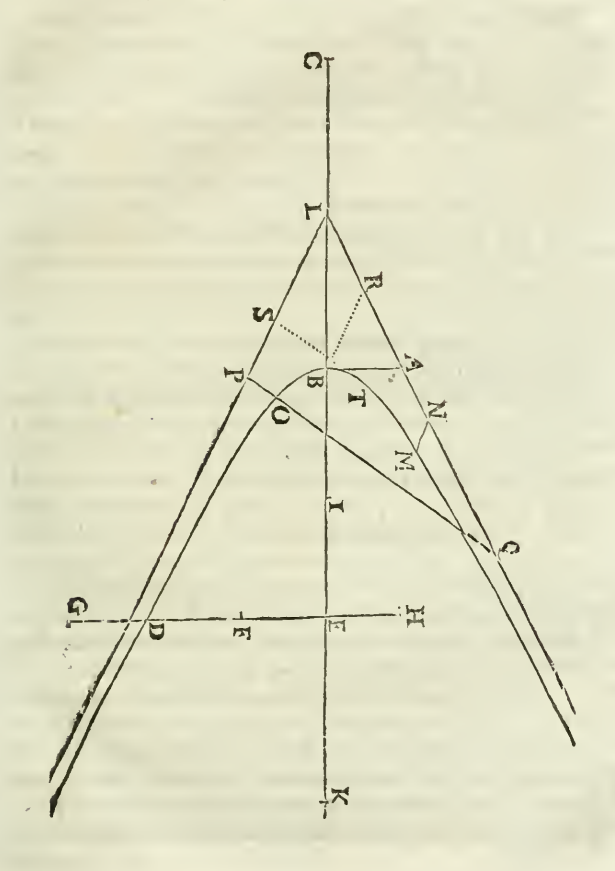
Quarta Æquatio.

Speciatim verò reſumamus primam hyperbolæ æquationem, putà $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$, & ponamus tranſverſum latus f æquale eſſe lateri recɛo b, quod accidit in quacunque hyperbola cujus aſymptoti ſunt ad angulos recɛos. Itaque diviſâ æquatione per f vel b, fiet hæc æquatio ſimplicior, $be + e^2 - a^2 \propto o$, vel $fe + e^2 - a^2 \propto o$.

Ex tali ergo æquatione concludere licebit hyperbolam recɛangulam, cujus latus recɛum erit b, ordinata a, ſive ad axem, ſive ad aliam quamcunque diametrum, & latus tranſverſum erit f æquale ipſi b, e autem erit quævis intercepta inter applicatam ſeu ordinatam & verticem.

At ex hac ſpeciali ac ſimplici æquatione multæ aliæ deduci poſſunt, ſi ſcilicet dividatur DE in F, vel ipſa DE producatur in G vel H, vel ſi BE dividatur in I, aut ipſa eadem BE producatur in K vel in L; vel rur-

sùs, si utraque tam DE quàm BE dividatur aut producatur, vel denique multis aliis modis, pro majori & majori Analystæ sagacitate.



Quinta Æquatio.

Resumamus adhuc primam hyperbolæ æquationem, nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$, oporteatque talem æquationem reddere simplicem, ita tamen ut illa ad quamcunque hyperbolam pertineat.

Intelligatur esse ut b ad f, ita a^2 ad u^2, unde fa^2 æquale erit ipsi bu^2. Itaque in æquatione, loco ipsius fa^2 succedat ipsum bu^2, & omnia applicentur ad b, ac tum $fe + e^2 - u^2 \propto o$.

Ex tali ergo æquatione licebit non solum hyperbolam rectangulam, ut suprà, directè concludere, sed etiam per fictionem poterimus eandem æquationem ad quamcunque hyperbolam extendere, cujus latus transversum sit f, latus autem rectum sit recta quævis, & e sit quæcunque intercepta inter ordinatam & verticem; at ordinata non erit u (nisi si latus rectum æquale ponatur esse lateri transverso f, ut fiat hyperbola rectangula.) Verùm ut ipsa ordinata habeatur, fiet ut transversum latus f, ad rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocabitur a^2, ac tum a erit ipsa ordinata: hoc autem ex præmissis manifestum est. Ex tali enim analogia fiet $fa^2 \propto bu^2$: at in æquatione simplici proposita habemus $fe + e^2 - u^2 \propto o$; quibus per b multiplicatis invenitur $bfe + be^2 - bu^2 \propto o$. Jam loco ipsius bu^2 succedat fa^2, & sic tandem fiet prima hyperbolæ æquatio nempe $bfe + be^2 - fa^2 \propto o$.

Porrò ad prædictas æquationes reduci poterunt quæcunque suprà ad circulum & ad parabolam directè aut indirectè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur, ut convenientem sortiantur interpretationem: at propter talem mutationem non erunt reciprocæ æquationes illæ; omninò enim nulla æquatio re-

ciproca eſt, niſi ſub iiſdem omninò ſpeciebus ſub quibus illa ad locum aliquem directè pertinet.

In analyſi ſpecioſa communiter liberum eſt ex infinitis hyperbolarum ſpeciebus eam eligere quam libuerit: quo ſanè caſu præſtabit rectangulam aſſumere, propter illius majorem ſimplicitatem. Aliquando etiam ſectio ipſa ex hypotheſi data eſt, ſed raró, putà cum beneficio analyſeos quæritur aliqua ejuſdem ſectionis proprietas, ut ſi quis ex dato puncto extra axem datæ ſectionis, minimam rectam quæ ad ipſam ſectionem duci poſſit inquirat, incidet ille in æquationem ſolidam quæ ſolvi poterit beneficio circuli & hyperbolæ, ita ut vel circulus quivis, vel quæcunque hyperbola ad arbitrium eligi poſſit. Eligetur ergo ipſa hyperbola data, cui circulus conveniens ex arte accommodabitur: aliàs enim peccatum multi exiſtimarent, ſi neglectâ ipsâ hyperbolâ datâ, aſſumeretur vel alia hyperbola vel parabola vel ellipſis, ut liberum eſt in omni æquatione ſolida; at hunc rigorem, ut elegantiorem, concedimus, ſic non omninò neceſſarium exiſtimamus, propter rationes ſuprà allatas, cùm quid geometricum cenſeri debeat examinaremus.

Sexta Æquatio.

Iiſdem poſitis, ſunto hyperbolæ aſymptoti LN, LP ad angulum quemcunque; atque ex vertice B ducatur recta BR parallela uni aſymptoton LD, quæ BR occurat alteri aſymptoton LN in puncto R. Itaque, ex hypotheſi quòd data ſit hyperbola, data quoque erit utraque LR, RB, unde & rectangulum ſub ipſis datum eſt, ſit ſpecies illius b^2. Tum ſumpto in hyperbola quocunque puncto M, ducatur recta MN parallela cuivis aſymptoto, putà LP, occurrenſque alteri LN in puncto N; atque ſpecies rectæ LN eſto a, ſpecies autem rectæ *Vide Figur. ſequentem.*

NM esto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum sub LR, RB æquale est rectangulo sub LN, NM: dabitur hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \infty a e$, seu $b^2 - a e \infty o$.

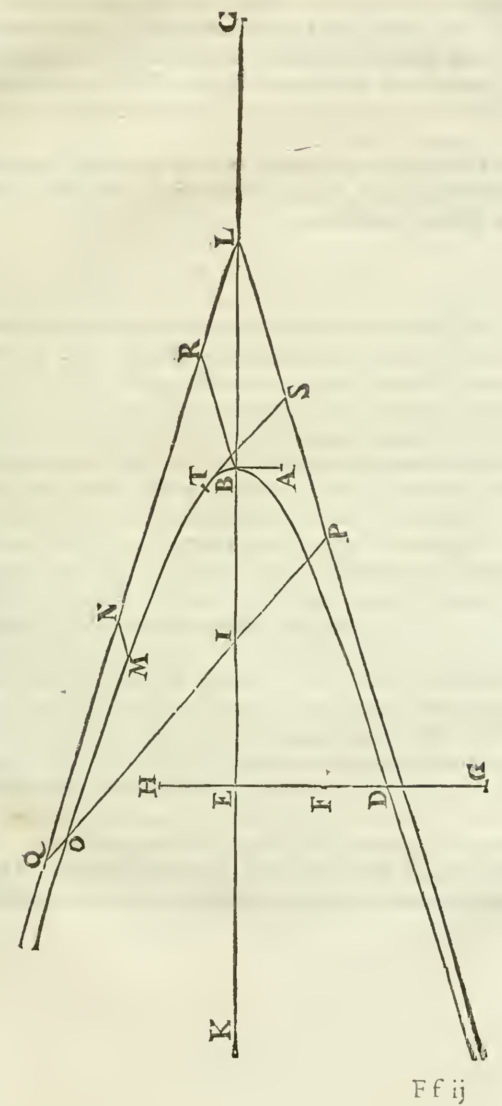
Ex tali ergo æquatione semper hyperbolam concludere licebit, cujus b^2 erit rectangulum sub LR, RB, at a erit quævis portio unius asymptotωn, putà LN ad centrum terminata, e verò recta intercepta inter hyperbolam & alterum ipsius speciei a extremum, quæ tamen recta e alteri asymptoto parallela existet, putà asymptoto LP existente e ipsâ rectâ MN.

Quòd si recta LN dividatur vel producatur, ut species illius sit vel $c + i$, vel $c - i$, vel $i - c$, manente NM indivisâ; aut si hæc NM dividatur vel producatur, ut species illius sit $d + u$, vel $d - u$, vel $u - d$ manente LN indivisâ, aut si utraque LN, NM dividatur, aut utraque producatur, aut denique altera earum dividatur, altera producatur: habebuntur inde multæ æquationes inventu faciles, atque omni hyperbolæ specificæ; unde ex qualibet illarum hyperbolam concludere licebit.

Apparet quoque tales æquationes ad quamcunque hyperbolam posse pertinere, nisi aut angulus asymptotωn datus sit, aut rectum latus, aut transversum, aut alia quædam proprietas, quæ cum dato b^2, hyperbolæ ipsius specie determinare possit.

Septima Æquatio.

Iisdem adhuc positis, ducatur quæcunque recta POQ secans hyperbolam in O, asymptotos autem in P & Q; atque illi PQ parallela existat TS tangens hyperbolam in T, occurrensque alteri asymptotωn, putà LP in S; & data sit positione & magnitudine ipsa TS, cujus species


C
L
R
S
T
B
A
P
N
M
I
H
E
F
D
G
Q
O
K

sit b, ex hypothesi quòd hyperbola sit quoque data; sit etiam rectæ OP species a, rectæ verò OQ species esto e. Quoniam itaque ex natura hyperbolæ, rectangulum POQ æquale est quadrato tangentis TS, fiet hæc æquatio hyperbolarum generi propria seu specifica $b^2 \propto ae$, seu $b^2 - ae \propto o$.

Ex tali ergo æquatione, eadem quæ suprà in sexta concludere licebit, atque id tam divisis ipsis PO, OQ, quàm iisdem productis.

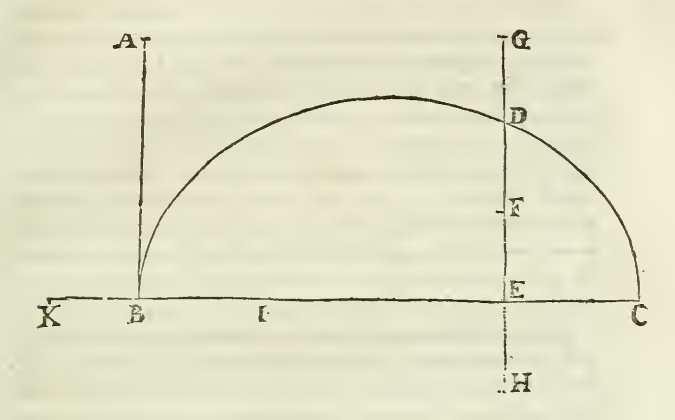
DE ELLIPSI.

IN ellipsi præcipuæ æquationes non multùm differunt à tribus circuli prioribus æquationibus, ut ibi monuimus. Omninò autem, non alio modo se habet circulus ad ellipses, quo hyperbola rectangula ad alias hyperbolas minimè rectangulas. Sicuti ergo in tali hyperbola rectangula æquatio simplex fuit, quæ respectu totius generis hyperbolarum composita extitit, sic in circulo, prædictæ priores tres æquationes simplices fuêre, quæ in genere ellipsium fient compositæ. At illud hîc breviter exponamus.

Prima Æquatio.

Esto ellipsis BD, cujus vertex B, rectum latus AB, diameter BC, sive illa sit axis sive non, DE ordinata ad illam diametrum, cui parallela sit AB; species autem ipsius AB esto b; ipsius BC, f; ipsius DE, a; ac tandem ipsius BE, e: unde rectanguli CEB species erit $fe - e^2$. At in omni ellipsi, ut diameter BC ad latus rectum AB, ita rectangulum CEB ad quadratum DE; itaque in speciebus, ut f ad b, ita $fe - e^2$ ad a^2: hinc æquatio $bfe - be^2 \propto fa^2$, sive $bfe - be^2 - fa^2 \propto o$.

Poterit autem vel recta BE, vel recta DE, vel utraque dividi vel produci; unde multæ nascentur æquationes inventu non admodum difficiles; sed id indicasse sufficiat.



Ex ejusmodi ergo æquationibus semper ellipsim concludere licebit, cujus latus rectum erit b, diameter f, ordinata ad diametrum a, vel quæcunque ipsam a in æquatione referet, ac tandem intercepta inter ordinatam & verticem erit e, vel quæcunque ipsam e in æquatione referet. Immò, dabitur quoque ipsius ellipsis species, ex hypothesi quòd angulus ABC vel DEC datus sit; si tamen angulus ille rectus esset, & rectæ b & f æquales, loco ellipsis haberemus circulum: quod demonstrare non erit difficile.

Secunda Æquatio.

Potest præmissa prima æquatio reddi simplicior, si fiat ut b ad f, ita a^2 ad u^2; unde $fa^2 \infty bu^2$. Itaque

in æquatione illa, loco ipsius fa^2 succedat illi æquale bu^2, ac tum $bfe - be^2 - bu^2 \infty o$: omnia applicentur ad b, fietque æquatio simplex $fe - e^2 - u^2 \infty o$.

Et hæc quidem æquatio directè pertinet ad circulum, at indirectè & per fictionem pertinere poterit ad quamcunque ellipsim, cujus diameter erit f, latus autem rectum erit recta quæcunque; at verò ordinata non erit u, (nisi latus rectum æquale sit ipsi f diametro, & angulus DEC obliquus) sed ut ipsa habeatur ordinata, fiet ut f ad latus rectum quod vocabimus b, ita u^2 ad aliud quod vocetur a^2, ac tum a erit ipsa ordinata; ex tali enim analogia fiet $fa^2 \infty bu^2$: at æquatio simplex erat $fe - e^2 - u^2 \infty o$, quâ in b ductâ, fit $bfe - be^2 - bu^2 \infty o$. Jam loco ipsius bu^2 succedat ipsi æquale fa^2, & sic tandem fiet prima ellipsis æquatio $bfe - be^2 - fa^2 \infty o$.

Ad prædictas æquationes reducentur quæcunque suprà ad circulum, ad parabolam & ad hyperbolam directè pertinebant, si species debitè atque ex arte permutentur, at iis conditionibus de quibus sæpiùs suprà dictum est.

Corollarium.

IN omnibus præmissis æquationibus liquidò constat, quatuor curvas ex quibus illæ deductæ sunt, nempe circuli circumferentiam, parabolam, hyperbolam, & ellipsim ad suas diametros relatas eo modo quo suprà, non transcendere secundum gradum, hoc est quadratum incognitarum magnitudinum a, e, i, u, &c. Quòd si quis easdem ad alias rectas quàm ad ipsas diametros referat, ille rursùs in similes, sive ejusdem gradus æquationes incidet; unde in universum, ex talibus æquationibus aliquam ex ipsis quatuor curvis semper concludere licebit: & hoc sufficit ad omnia loca plana & solida Anti-

quorum invenienda & componenda ; ſi tamen his æquationibus paucæ addantur quæ pertinent ad lineas rectas, dum illæ ad alias rectas referuntur, quæ ſanè æquationes ipſum eundem ſecundum gradum non excedunt; at verò ad hanc inventionem & compoſitionem requiritur Analyſta non vulgaris. Sed hoc etiam indicaſſe ſufficiat: nunc pauca de locis linearibus ad æquationes geometricas abſoluto modo revocatis ſuperſunt dicenda, quod nos in conchoïde Nicomedis tantùm exequemur, ſiquidem illa etiam in ſequentibus ad noſtrum inſtitutum ſatis erit, videturque eadem eſſe locorum omnium linearium ſimpliciſſimus.

De Conchoïde Nicomedis.

Etsi multa ſint linearum curvarum genera quæ in infinitas ſpecies multiplicentur, tamen hac in parte, conchoïdum genus omnia alia genera longiſſimè, immò infinities infinitè ſuperat. Siquidem nulla datur curva ex quâ infinitæ conchoïdes deduci non poſſint, atque omnes ſpecie, immò etiam genere differentes; ac prætereà, cujuſvis conchoïdis infinitæ rursùs dantur conchoïdes ſpecie ac genere inter ſe diſtinctæ, ita ut propoſitâ quâcunque curvâ putà circuli circumferentiâ, ſtatim ex ea innumeræ conchoïdes deducantur, quæ quamquam genere inter ſe diſtinctæ, tamen omnes ſint primi cujuſdam ordinis; tum ex unaquaque illarum innumeræ rursùs aliæ naſcantur genere diverſæ, quæ omnes ſecundi cujuſdam ordinis exiſtant, ex quibus ſingulis eodem modo innumeræ tertii cujuſdam ordinis oriuntur; atque ita in infinitum infinities abit talis multiplicatio.

Nos verò ex omnibus illis generibus duo tantùm ſeligere decrevimus, quæ quamquam ſimpliciſſima exiſ-

tant, tamen illa per ſe ſingula ad æquationes analyticas quinti ac ſexti gradus, hoc eſt quadrato-cubicas ac cubo-cubicas ſolvendas ſufficiunt; ita ut beneficio cujuſvis illorum generum poſſit angulus quicunque rectilineus in quinque partes æquales dividi. Horum generum prius erit illud cujus conchoïdes vulgò vocantur à Nicomede earum inventore, ſuntque conchoïdes circulares primi ordinis, de quibus Eutocius in Archimede, necnon alii permulti authores ſcripſere; quandoquidem per medium talis conchoïdis Nicomedes ipſe famoſiſſimum problema de cubo duplicando ſolvere aggreſſus eſt, quamquam ſanè modo non uſque adeò legitimo, cùm tale problema ad lineas ſimpliciores, putà conicas, pertineat: ſolidum enim illud eſt tantùm, at conchoïdes omnes ſunt loci lineares. Alterum duorum generum conchoïdum noſtrarum erit parabolicarum, de quibus primus egiſſe putatur Renatus *des Cartes* in ſua Geometria, qui etiam modo prorsùs legitimo iiſdem uſus eſt ad problemata analytica ſexti gradus ſolvenda, ad quem gradum illa quoque aſcendere cogit quæ ſunt quinti gradus; quod ſanè ei liberum, at non omninò neceſſe fuit, ſed modum quo aliter ab iis ſe expediret, aut non advertit, aut aliqua de cauſa neglexit.

In his duobus conchoïdum generibus hoc notatu dignum accidit, quòd quamquam ſimplicius ſit circulare quàm parabolicum, ſi linearum genitricium ratio habeatur, (ſimplicior enim eſt circuli circumferentia quàm parabola) tamen, cùm ad æquationes ventum fuerit, reperiuntur illæ in conchoïde parabolica ſimpliciores quàm in circulari; non quidem ratione gradûs ad quem illæ aſcenderunt, qui in utraque ſuâ naturâ ſextus eſt exiſtente æquatione univerſali, ſed ratione multiplicitatis affectionum, ſeu homogeneorum per ſigna + & — diſtinctorum; at illud magis in ſequentibus patebit.

Cùm

Cùm autem dicimus ejusmodi conchoïdes ad sextum gradum pertinere, hoc intelligendum est dum illæ ad æquationes analyticas revocantur modo respectivo, non autem simplici seu absoluto; quod etiam rursùs infrà clariùs innotescet.

Antequàm ad æquationes accedamus, pauca præmittenda sunt de natura conchoïdum in universum; tum etiam pauca de conchoïde circulari in specie.

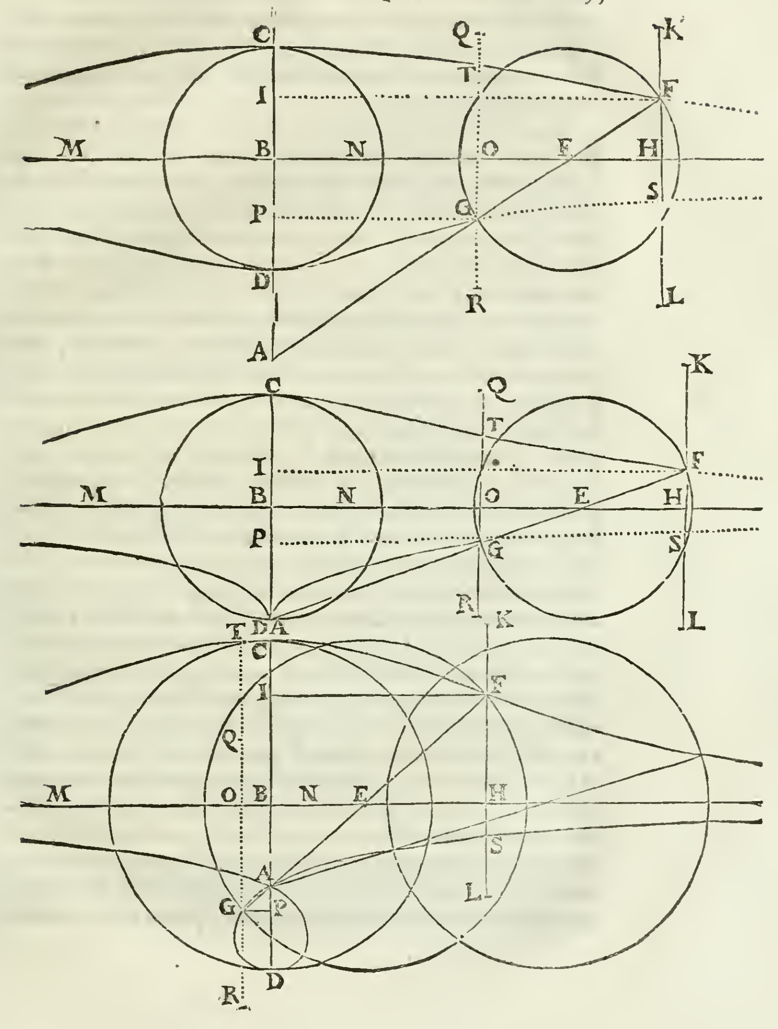
In universum ergo concipiatur quævis linea curva in plano jacens, quod planum moveri possit unà cum eadem curva motu quolibet tam lationis quàm circumvolutionis: hæc linea vocetur genitrix, à qua conchoïs describenda denominabitur, planum verò posteà vocabitur planum mobile: in hoc plano mobili notetur punctum quodcunque intra vel extra genitricem, quod vocetur polus mobilis: per hunc polum transeat quædam linea recta quæ circa talem polum liberè moveri possit, & tamen in ipso plano semper jaceat, ut recta illa sit instar regulæ mobilis quam communiter nomine Arabico vocare solent *alhidadam* in permultis instrumentis; hanc posteà vocabimus regulam. Concipiatur deinde quæcunque linea, recta vel curva, in aliqua superficie jacens, (nos hanc superficiem planam assumimus, quam tamen curvam etiam assumere licebit) quæ superficies, quia immobilis statui debet saltem ad faciliorem intelligentiam, dicatur superficies immobilis; & linea in ea concepta dicatur semita, quandoquidem per illam ac secundùm eandem moveri debet polus plani mobilis, dum planum illud posteà motu lationis secundùm præscriptas leges aliquas deferetur. Prætereà, in superficie immobili extrà semitam, ultrà citráve, notetur punctum quodcunque quod vocetur polus immobilis, circa quem movebitur regula de qua jam dictum est, ita ut eadem per duos polos, mobilem scilicet & immobilem, perpetuò

transſeat, jaceatque interim ſemper in plano mobili.

His poſitis, ſi ſtatuamus planum mobile cum immobili, ita ut polus mobilis exiſtat in ſemita, & regula per utrumque polum tranſeat, tum moveatur planum mobile ſecundùm certam quandam ac conſtitutam legem, quæ tamen lex ad arbitrium Geometræ initio pendet, modò poſteà illa inviolatam ſervet, polo mobili ſecundùm ſemitam delato, neque ab ea uſquam evagante, notenturque interim puncta in quibus regula genitricem ſecat, ac per omnia illa ſectionum puncta, linea duci intelligatur: hæc erit conchoïs de qua nunc agimus.

Fieri autem poteſt, ac reverà fit ſæpiſſimè, ut in una eademque plani mobilis atque ideò lineæ genitricis poſitione, regula ipſam genitricem in duobus vel pluribus punctis ſecet; unde etiam accidit non raro, ut conchoïs inde orta non ſit unica linea continua, ſed duplex, triplex, aut multis modis multiplex, ita ut partes illius aliquando, etiam in infinitum productæ, nunquam ſibi invicem occurrant; aliquando, è contrario, illæ partes ſe ſecent, & aliquando eædem ſe tangant tantùm: ſed & illud fieri poteſt, ut aliqua poſitione, regula lineæ genitrici nullo modo occurrat, quo pacto conchoïs non erit ad utramque partem infinitè extenſa, vel certè ipſa erit interrupta, non verò continua. Sed hæc indicaſſe ſufficiat in tam vaga atque multiplici linearum infinitis modis infinitarum deſcriptione.

In ſpecie. Ponamus in aliqua ex tribus his figuris, planum mobile eſſe illud in quo eſt circulus cujus diameter eſt CD vel GF; atque in eo plano lineam genitricem eſſe ejuſdem circuli circumferentiam; polum mobilem eſſe ipſius centrum B vel E, & regulam eſſe rectam AB, vel AE. Ponamus deinde planum immobile eſſe id in quo eſt recta BE in infinitum utrinque producta, quæ recta eadem ſit ſemita per quam feratur


C
Q
K
T
I
F
M
B
N
O
E
H
S
P
G
D
R
L
A
K
C
Q
T
I
F
M
B
N
O
E
H
P
S
G
R
L
K
T
D
A
C
I
F
Q
M
O
B
N
E
H
S
A
L
G
P
D
R

polus mobilis B vel E, atque unà cum ipſo planum mobile deferens circulum CD vel GF, polus verò immobilis in hoc plano immobili eſto A, per quem tranſeat regula AB vel AE.

Manifeſtum eſt ergo, quòd dum centrum circuli, ſive polus mobilis feretur ſecundùm ſemitam BE, regula per hunc polum mobilem ac per immobilem A ſemper tranſiens, poſitionem ſuam continuò mutabit. Jam lex motus eſto, ut planum mobile ſemper inter movendum jaceat ſecundùm ſuam planitiem in plano immobili; hæc enim lex ſola ſufficit ad certam atque indubitatam deſcriptionem. Hoc pacto, quia in quacunque circumferentiæ genitricis poſitione, regula ipſam circumferentiam in duobus punctis, nec pluribus, ſemper ſecat, quorum punctorum unum eſt ad unas partes ſemitæ versùs polum immobilem A, quale eſt punctum D vel G, alterum ad alteras partes ejuſdem ſemitæ, quale eſt C vel F: fit neceſſariò ut conchoïs circularis inde orta componatur ex duabus lineis ad utraſque partes ſemitæ BE exiſtentibus, quarum linearum unaquæque ex utraque parte in infinitum extenditur ſic ut ſemita utriuſque aſymptotos exiſtat. Illæ lineæ in figuris præmiſſis ſunt CTF, DGS, quarum exterior CTF (exteriorem voco eam quæ reſpectu poli immobilis A jacet ad alteras partes ſemitæ BE) circa verticem C, ad aliquam diſtantiam ex utraque parte ipſius verticis, interiùs cava eſt versùs ſemitam BE: eſt autem vertex C punctum id in quo recta AB ad ſemitam BE perpendiculariter producta occurrit ipſi conchoïdi; at ultra talem diſtantiam mutatur cavitas ipſa, fitque ad partes exteriores, convexitas verò reſpicit ſemitam uſque in infinitum. At conchoïs interior DGS, præter id quod de exteriori jam diximus, quibuſdam accidentibus obnoxia eſt, prout recta AB vel

ſemidiametro DB major eſt, vel eidem æqualis, vel ipsâ major; exiſtente enim AB majore quàm DB, idem accidit quod de exteriori jamjam attulimus, quodque in prima trium figurarum ſatis apparet; exiſtentibus verò rectis AB, DB æqualibus, ut in ſecunda figura, tunc conchoïs interior ad punctum A vel D qui vertex eſt, angulum conſtituit quolibet acuto rectilineo minorem, ut ſic conchoïs ex duabus lineis ad verticem AD ſeſe tangentibus componi videatur, quarum utraque ad partes ſemitæ BE ſemper convexa eſt uſque in infinitum. Verùm, exiſtente rectâ AB minore quàm DB, ut in tertia figura, tunc conchoïs inter puncta A, D ita involvitur, ut ſpatium comprehendat laquei inſtar, cujus funiculi poſtquàm ad punctum A decuſſatim ſeſe ſecuerunt, abeunt ex utraque parte in infinitum, ita tamen ut convexitas eorum ad partes ſemitæ BE ſemper reſpiciat.

Sic ergo ſe habet conchoïs circularis Nicomedis. Quòd ſi polus mobilis non ſit centrum circumferentiæ genitricis, ſed quodvis aliud punctum in plano mobili aſſumptum: fient aliæ conchoïdes circulares à prædicta & à ſe invicem diverſæ in infinitum; quod tamen indicaſſe ſufficiat. Sed & ſemita poterit eſſe non recta linea ut BE, verùm alia circuli circumferentia in plano immobili jacens; quo etiam pacto aliæ atque aliæ conchoïdes circulares gignentur, quales habentur apud Vietam in ſupplemento Geometriæ, quamquam ſanè idem, ſicuti de Nicomede diximus, modo non uſque adeo legitimo quàm par fuerat uſus eſt, in ſolvendis ſcilicet problematis ſuâ naturâ ſolidis, cùm conchoïdes illæ ſint loci lineares. Sed hoc rurſus indicaſſe ſufficiat, ut inde poſſit quivis colligere quàm immenſa ſit conchoïdum, etiam circularium, omnium inter ſe ſpecie differentium multitudo; nunc ad æquationes analyticas mo-

do abſoluto, ipſam Nicomedeam revocemus, ut protinùs ad conchoïdem parabolicam deveniamus. Itaque in conchoïde exteriori CTF cujuſvis ex tribus figuris præmiſſis ſunto ſpecies:

AB	b,
BC, EF	c,
FH, BI	a,
FI, BH	e,

Et quoniam ut recta AI ad IF, ita eſt FH ad EH: erit in ſpeciebus,

ut $b + a$ ad e, ita a ad $\frac{ae}{b+a}$

EH $\frac{ae}{b+a}$

EH quadratum $\frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$.

Ponitur autem triangulum EFH eſſe rectangulum. Hinc æqualitas in quadratis laterum,

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2 e^2}{b^2 + 2ba + a^2}$$

& omnibus in communem diviſorem ductis,

$$b^2 c^2 + 2bc^2 a + c^2 a^2 \propto b^2 a^2 + 2ba^3 + a^4 + a^2 e^2;$$

$$\text{vel } b^2 c^2 + 2bc^2 a \begin{matrix} + c^2 a^2 \\ - b^2 a^2 \end{matrix} - 2ba^3 - a^4 - a^2 e^2 \propto 0:$$

unde ex tali æquatione ſub iiſdem ſpeciebus licebit pronuntiare ipſam æquationem ad conchoïdem circularem Nicomedis exteriorem pertinere.

Neque verò in conchoïde interiori DGS magna erit differentia; omnibus enim ritè ordinatis differet æquatio, non quidem ſpeciebus, ſed ſpecierum affectionibus ſecundùm ſigna $+$ & $-$, idque in quibuſdam affectionibus tantùm, ut ex formula ſequenti apparet. Sunto ergo ſpecies:

AB eſto	b,
BC, EF, EG	c,
GO, BP	a;
GP, BO	e,

Ut $b - a$ ad e, ita a ad $\frac{ae}{b-a}$

OE $\frac{ae}{b-a}$

OE quadratum $\frac{a^2e^2}{b^2 - 2ba + a^2}$

Ponitur autem triangulum EOG eſſe rectangulum. Unde fiet æqualitas in quadratis laterum, nempe

$$c^2 \propto a^2 + \frac{a^2e^2}{b^2 - 2ba + a^2}.$$

& omnibus ductis in communem diviſorem,

$$b^2c^2 - 2bc^2a + c^2a^2 \propto b^2a^2 - 2ba^3 + a^4 + a^2c^2;$$

$$\text{vel } b^2c^2 - 2bc^2a \begin{matrix} +c^2a^2 \\ -b^2a^2 \end{matrix} + 2ba^3 - a^4 - a^2e^2 \propto 0.$$

Itaque ex ejuſmodi æquatione ſub iiſdem ſpeciebus concludemus conchoïdem circularem Nicomedeam interiorem, ex qua æquatio illa ortum duxerit.

Porrò multis modis, immò innumeris, variari possunt magnitudines ignotæ *a* & *e*; quippe si altera earum vel ambæ datâ magnitudine augeantur vel minuantur, ut factum est suprà in circulo, parabola, hyperbola, & ellipsi. Finge enim productam esse HF in K, ita ut FK data sub specie *d*, HK autem in specie sit *i*: tum verò HF erit in speciebus $i - d$ quæ priùs erat *a*; unde loco speciei *a* & graduum ejus in æquatione, substitui poterunt $i - d$ & gradus ipsius; quo pacto fiet alia quæpiam æquatio à præmissis diversa, ac multò pluribus nominibus constans, quæ sub suis speciebus ad conchoïdem Nicomedis pertinebit. Idem etiam concludemus si FH producatur in L, & ipsius HL species sit *d*, ipsius autem FL species sit *i*, sic enim rursùs HF erit in specie $i - d$, &c. Quòd si iisdem productis, HK vel FL data sit sub specie *d*, & ipsius FK vel HL species sit *i*, erit ipsius FH species $d + i$ quæ priùs erat *a*; unde, &c. ut suprà.

Supple punctum V. in figura. Potuit etiam dividi FH in V, ita ut ex duabus portionibus FV, VH, altera, putà VH, data esset sub specie *d*, altera FV ignota sub specie *i*; atque ita ipsius HF species fuisset $d + i$ quæ priùs erat *a*; unde, &c. ut suprà.

Nec minùs produci potuit recta FI vel HB in M, vel eadem dividi in N. Sed hoc indicasse sufficiat.

Eodem modo ratiocinabimur de rectis GO & GP vel OB, quo de rectis FH & FI vel HB, ut manifestum est.

Infinitos modos relinquimus, quia prædictos sufficere putavimus, ad hoc ut quivis suopte ingenio quotvis alios ut libuerit, inquirat, & analyticè prosequatur.

Appendix

Appendix ad Isagogen topicam continens solutionem Problematum solidorum per locos.

Patuit methodus quâ lineæ locales deteguntur: inquirendum restat quâ ratione Problematum solidorum solutio possit ex supradictis elegantissimè derivari. Hoc ut fiat, coarctanda illa quantitatum ignotarum extra limites suos evagandi licentia. Infinita enim sunt puncta quibus quæstioni propositæ satisfit in locis: commodissimè igitur per duas æqualitates locales quæstio determinatur, secant quippe se invicem duæ lineæ locales positione datæ, & punctum sectionis positione datum quæstionem ex infinito ad terminos præscriptos adigit. Exemplis breviter & dilucidè res explicatur.

Proponatur a cubus $+$ b in a quadratum æquari z plano in b.

Commodè utraque æqualitatis pars potest æquari solido b in a in e, ut per divisionem istius solidi, illinc per a, hinc per b res deducatur ad locos. Cùm igitur a cubus $+$ b in a quadratum æquetur b in a in e; ergo aq $+$ b in a æquabitur b in e:

Et erit, ut patet ex nostra methodo, extremitas ipsius e ad parabolam positione datam.

Deinde cùm z p in b æquetur b in a in e, ergo z p æquabitur a in e.

Et erit ex nostra methodo extremitas ipsius e ad hyperbolam positione datam. Sed jam probavimus esse ad parabolam positione datam. Ergo datur positione, & est facilis ab analysi ad synthesin regressus.

Nec dissimilis est methodus in omnibus æquationibus cubicis. Constitutis enim ex una parte solidis omnibus ab a adfectis, ex altera solido omninò dato, vel etiam

cum solidis ab a vel $a\,q$ affectis, poterit fingi æqualitas superiori similis.

Proponatur exemplum in æquationibus quadrato-quadratorum.

$a\,qq + b\,s$ in $a + z\,p$ in $a\,q \propto d\,pp$: ergo $a\,qq \propto d\,pp - b\,s$ in $a - z\,q$ in $a\,q$ æquentur hæc duo homogenea $z\,q$ in $e\,q$.

Cùm igitur $a\,qq$ æquetur $z\,q$ in $e\,q$: ergo per subdivisionem quadraticam, $a\,q$ æquabitur z in e, & erit extremitas E ad parabolam positione datam.

Deinde cùm $d\,pp - b\,s$ in $a - z\,q$ in $a\,q \propto z\,q$ in $e\,q$, omnibus per $z\,q$ divisis,

$$\frac{d\,pp - b\,s \text{ in } a}{z\,q} - a\,q \propto e\,q.$$

Et erit ex nostra methodo extremitas E ad circulum positione datum; sed est & ad parabolam positione datam : ergo datur.

Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato-quadraticæ. Expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo & quadrato-quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis, per parabolam, circulum vel hyperbolam solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ B major, D minor, inter quas duæ mediæ proportionales sunt inveniendæ, fiet a cubus $\propto b\,q$ in d, posito nempe quòd major mediarum ponatur a.

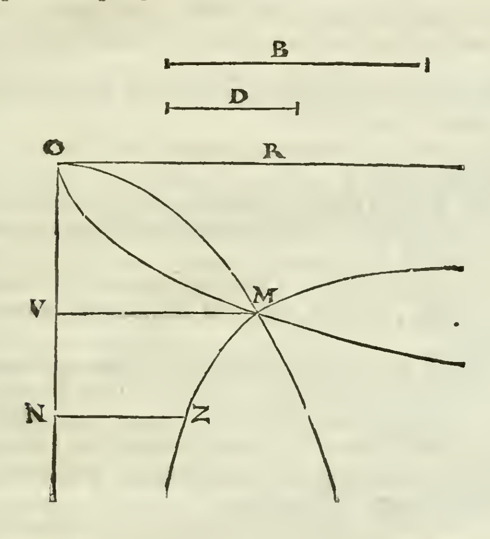
Æquentur singula homogenea b in a in e.

Illinc fiet $a\,q \propto b$ in e.

Istinc a in $e \propto b$ in d.

Ideoque quæstio per hyperbolæ & parabolæ intersectionem perficietur.

Exponatur enim recta quævis poſitione data OVN in qua detur punctum O. Sint rectæ datæ B & D inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta OV æquari a, & recta VM ipſi OV ad rectos angulos æquari e. Ex priori æqualitate, qua a^q æquatur b in e, conſtat per punctum O tanquam verticem, deſcribendam parabolam cujus rectum latus ſit b, diameter ipſi VM parallela & applicatæ ipſi OV : tranſibit igitur hæc parabola per punctum M.



Ex ſecunda æqualitate quâ b in d æquatur a in e, ſumatur punctum ubilibet in recta OV , ut N , à quo excitetur perpendicularis NZ , & fiat rectangulum ONZ æquale rectangulo b in d. Excitetur perpendicularis OR. Circa aſymptotos RO , OV deſcribenda hyperbola per-

punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M. Sed parabola etiam quam suprà descripsimus datur positione, & per idem punctum M transit: datur igitur punctum M positione, à quo si demittatur perpendicularis MV, dabitur punctum V, & recta OV major duarum continuè proportionalium quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per intersectionem parabolæ & hyperbolæ.

Si ad quadrato-quadrata lubeat quæstionem extendere, omnia ducantur in a, tunc a qq æquabitur b q in d in a.

Æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum b q in e q.

Fient duæ æqualitates, nempe a q & b in e.

Et d in a & e q.

Quæ singulæ dabunt parabolam positione datam. Fiet igitur constructio mesolabii per intersectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimede, & huic methodo facilimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ paraplerofes Vietææ quibus æquationes quadrato-quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice plana; pari enim elegantiâ, facilitate & brevitate solvuntur, ut jam patuit: perinde quadrato-quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor, elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, en constructionem omnium problematum cubicorum & quadrato-quadraticorum per parabolam & circulum.

Ponatur a qq + z s in a ∞ d pp: ergo a qq ∞ — z s in a + d pp. Fingatur quadratum abs a q — b q, aut alio quovis quadrato dato, fiet quadratum a qq + b qq

$-\ b\,q$ in $a\,q$ bis. Addantur ad supplementum singulis æqualitatis partibus $b\,q\,q - b\,q$ in $a\,q$ bis : fiet $a\,q\,q + b\,q\,q - b\,q$ in $a\,q$ bis $\propto b\,q\,q - b\,q$ in $a\,q$ bis $-\ z^{s}$ in $a + d\,p\,p$; sit $b\,q$ bis $\propto n\,q$, & singulis homogeneis sive partibus æqualitatis æquetur $n\,q$ in $e\,q$: fiet illinc per subdivisionem quadraticam $a\,q - b\,q \propto n$ in e; ideóque punctum extremum e erit ad parabolam ex nostra methodo : isthinc fiet,

$$\frac{b\,q\,q}{n\,q} - a\,q - \frac{z^{s} \text{ in } a + d\,p\,p}{n\,q} \propto e\,q.$$

Ideóque ex nostra methodo, punctum extremum e erit ad circulum. Descriptione igitur parabolæ & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facilimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato-quadraticos extenditur. Curandum est tantùm ut ex una parte sit $a\,q\,q$; ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab a cubo. At per expurgationem Vietæam omnes æquationes quadrato-quadraticæ ab affectione sub cubo liberantur : ergo eadem in omnibus methodus. Cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab adfectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in a ductis, fiet æquatio quadrato-quadratica, cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo; ideóque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut $a\,q$ ex una parte, ex altera $e\,q$ sub contraria affectionis nota reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, $a\,q\,q \propto z\,p$ in $a\,q - z^{s}$ in d. Fingatur quodvis quadratum abs $a\,q -$ quovis quadrato dato ut $b\,q$, fiet $a\,q\,q + b\,q\,q - b\,q$ in $a\,q$ bis. Adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum $b\,q\,q - b\,q$ in $a\,q$ bis, fiet $a\,q\,q$.

$+ bqq - bq$ in aq bis $\propto bqq - bq$ in aq bis $+ zp$ in $aq - z^s$ in d.

Ut igitur commoda fiat diviſio in ſecunda æqualitate, ſumenda differentia inter bq bis & zp quæ ſit verbi gratiâ nq, & utraque æqualitatis pars æquanda nq in eq.

Ut illinc fiat $aq - bq \propto n$ in e.

Iſthinc $\frac{bqq}{nq} - aq - \frac{z^s}{nq}$ in $d \propto eq$.

Advertendum deinde bq bis debere præſtare zp, alioquin aq non afficeretur ſigno defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolam, cui prumptum remedium; bq enim ad libitum ſumimus, ideóque ipſius duplum majus zp nullius eſt negotii ſumere. Conſtat autem ex methodo locali, circulum creari ſemper ex æqualitate in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur ſigno $+$; in altera aliud quadratum ignotum ſigno $-$.

Si ſumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit $a^c \propto bq$ in d.

Et $aqq \propto bq$ in d in a.

Adjiciatur utrinque $bqq - bq$ in aq.

$aqq + bqq - bq$ in aq æquabitur $bqq + bq$ in d in $a - bq$ in aq.

Sit $bq \propto nq$.

Et ſingulæ æqualitatis partes æquentur nq in eq.

Fiet illinc $aq - bq \propto n$ in e.

Ideóque extremum e erit ad parabolam.

Iſthinc fiet $bq \frac{1}{2} + d \frac{1}{2}$ in $a - aq \propto eq$; ideóque extremum e erit ad circulum.

Qui hæc adverterit, fruſtrà quæſtionem meſolabii, triſectionis angularis, & ſimiles tentabit deducere ex planis, hoc eſt per rectas & circulos expedire.

TRAITE
DES INDIVISIBLES.

POUR tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes, on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendroit le quarré qui auroit 4 de côté comme le triangle; & encore qu'il ne fallût pas 10 points pour achever le quarré, parce que le côté AB seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excéde jamais la moitié du quarré que

A●
● ●
● ● ●
● ● ● ●B

de la moitié de ſon côté : or y ayant une infinité de côtez audit quarré pris dans les indiviſibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en conſidération ; ainſi ce triangle-cy qui a 4 de côté n'excede la moitié du quarré collateral, (c'eſt-à-dire qui a pareil côté) que de 2 qui eſt $\frac{1}{4}$ de ladite moitié, ou la moitié du côté. Si le triangle avoit 5 de côté, il n'excederoit que de $\frac{1}{5}$ de la moitié du quarré collateral : s'il en a 6, il n'excedera que de $\frac{1}{6}$, & ainſi de ſuite ; & puiſqu'on voit que l'excès diminuë toûjours, il s'anéantira enfin dans la diviſion indéfinie.

De même ſi les lignes ſuivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la ſomme de toutes ces lignes ou des points qui les repréſentent, ſeroit à la derniére priſe autant de fois, comme la ſomme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, ſçavoir comme 1 à 3 ; car quoique prenant un nombre fini de quarrez leur ſomme ſoit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la diviſion infinie elle ne ſeroit que le tiers ; car ladite ſomme ne paſſe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube que de la moitié du plus grand quarré $+$ $\frac{1}{6}$ du côté. Or dans le cube il y a une infinité de quarrez, & partant la moitié d'un d'iceux n'eſt pas conſidérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou côté du même cube.

Ainſi le cube étant 64, pour avoir la ſomme des quarrez dont le plus grand ſoit collateral audit cube, on prendra le tiers d'icelui, ſçavoir 21 $\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, ſçavoir 8, on aura 29 $\frac{1}{3}$, à quoi joignant encore $\frac{1}{6}$ de 4 qui eſt le côté, ſçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la ſomme des quatre premiers quarrez. Et ainſi par les proprietez des puiſſances ſuivantes, on montrera que la ſomme des cubes eſt $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collateral au plus grand cube ; que la ſomme des quarrez-quarrez eſt $\frac{1}{5}$ de la cinquiéme puiſſance ; que la
ſomme

somme des cinquiémes puissances est $\frac{1}{6}$ de la sixiéme puissance, & ainsi des autres. Mais il faut remarquer que les puissances ont ainsi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point si on en omet une entre deux. Ainsi la ligne ou côté n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquiéme puissance, &c. car les lignes prises à l'infini ne faisant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrez dans le cube, si l'on ajoûte ou si l'on ôte un seul quarré cela n'operera rien. La même chose se montrera du quarré eû égard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquiéme puissance, &c.

La superficie se divise aussi en une infinité de petites superficies, lesquelles ou sont égales, ou ont une égale différence, ou gardent entr'elles quelqu'autre progression, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les superficies sont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les superficies, on comparera les lignes à une autre chose, & la somme de toutes les petites surfaces ou des lignes qui les représentent, sont à la grande surface prise autant de fois comme 1 à 3, comme il a été dit.

De même les solides se divisent en une infinité de petits solides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des surfaces : & d'autant que les solides sont terminez par des surfaces, au lieu de dire que ces petits solides sont au grand solide pris autant de fois, je dis, l'infinité des surfaces sont à la plus grande prise autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de son côté, ou comme 1 à 4.

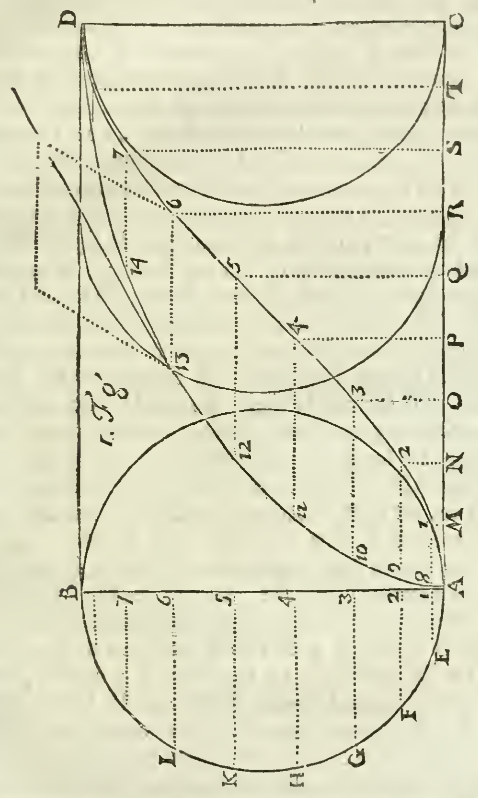
Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes, & compose la ligne entiére. L'infinité de

lignes repréſente l'infinité des petites ſuperficies qui compoſent la ſuperficie totale. L'infinité des ſuperficies repréſente l'infinité de petits ſolides qui compoſent enſemble le ſolide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-même, comme s'il etoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, enſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En après je conſidére le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonference. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé au-deſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E1, & le ſinus Verſe A1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De même quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F2, & A2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G3, le ſinus Verſe A3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que

parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1, A2,



A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-

dant ſes deux mouvemens, je porte toutes ſes hauteurs ſur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P4, Q 5, R 6, S 7 ſont les mêmes que celles qui ſont priſes ſur AB. Puis je prends les mêmes ſinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte ſur chaque hauteur trouvée ſur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extremitez de ces ſinus ſe forment deux lignes, dont l'une eſt A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je ſçai comme s'eſt fait la ligne A 8 9 D; mais pour ſçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A eſt monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier eſpace pendant que AB eſt venu en M, le ſecond pendant que AB eſt venu en N, & ainſi toûjours également d'un eſpace à l'autre juſques à ce que le diamétre ſoit arrivé en CD; alors le point A eſt monté en B. Voilà comment s'eſt formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un eſpace, étant ſéparées l'une de l'autre par tous les ſinus, & ſe rejoignant enſemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes eſt égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres ſont compoſées de lignes égales, ſçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des ſinus E 1, F 2, &c. qui ſont les mêmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainſi la figure A 4 D 12 eſt égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D diviſe le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié ſont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant ſelon Archiméde, la moitié eſt égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, ſçavoir l'eſpace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'eſpace A 8 9 D C; &

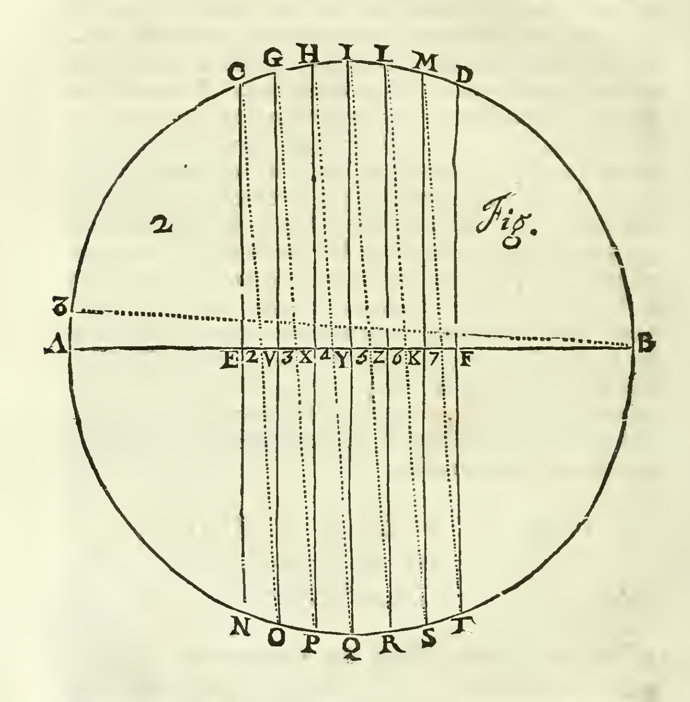
faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considére ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamétre marchant parallelement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre côtez égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

PROPORTION de la circonférence du cercle à son diamétre.

SOIT le cercle AIBQ, son diamétre AB, & soient tirez les sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD soient égaux: je dis que la ligne EF est à la circonférence CD, comme tous les sinus ensemble, sçavoir CE, GV & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demi-diamé-

tres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N, GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant. Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je



fais des triangles semblables, ausquels triangles semblables les lignes DF & NE ne sont point employées, mais cela n'importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par-après la

ligne B 8 faiſant l'arc 8 A égal à CG ; & du point 8 j'abaiſſe la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle ſemblable aux triangles C 2, E, G 3 V, & aux autres ſuivans. Nous feignons que la circonférence CD eſt diviſée par infinis ſinus, & que la ligne à 8 A étant ſi proche de la circonférence 8 A, devient elle-même circonférence & égale à 8 A, ou à CG, & à chacune des autres quiont été diviſées en infini. De plus, nous diſons que la ligne B 8 peut être tant approchée par une diviſion infinie de la ligne AB diamétre, qu'elle devient elle-même diamétre.

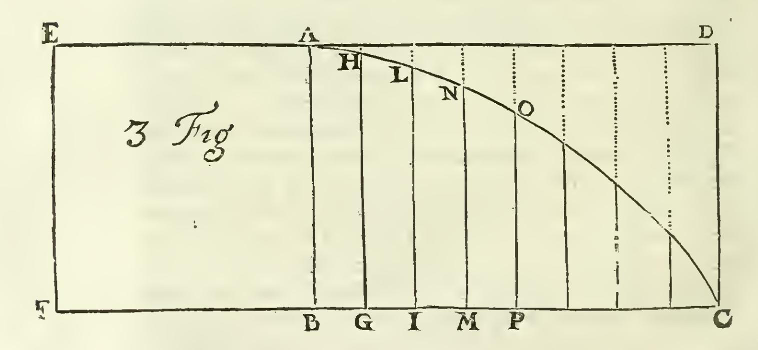
Puis on dira : Comme CE eſt à E 2, ainſi OV eſt à V 2, & ainſi de tous les triangles qui ſuivent la même régle. En après, le triangle CE 2 eſt ſemblable au triangle GV 3, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, ſoûtenant circonférences égales NO, OP, car toutes ſont égales depuis N juſques en T, & partant comme tous les doubles ſinus CN & autres ſont à la ligne EF, ainſi CE à E 2 : or comme CE à E 2, ainſi B 8, qui eſt devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence, qui ſera égal à CG & aux autres. Ainſi, comme tous les ſinus à la ligne EF, ainſi le diamétre B 8 devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence ; & au lieu de dire 8 A, je dis CG ; & coupant les antécedens en deux, je dis, comme les ſinus d'enhaut à la ligne EF, ainſi le demi-diamétre ou ſinus total à CG ; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de diviſions, tous les ſinus d'enhaut ſeront à EF, comme autant de demi-diamétres ou ſinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C juſques en D, ſont à la circonférence CD : & changeant, comme tous les ſinus d'enhaut ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamétres, ainſi la ligne EF eſt à la circonférence CD.

Que ſi la ligne EF avoit été le demi-diamétre, & que

les ſinus euſſent été abaiſſez du quart de la circonféren-ce, le demi-diamétre eût été au quart de la circonféren-ce comme tous les ſinus diviſans la circonférence ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamétres.

FIGURE COURBE égale au Quarré.

SUPPOSANT que le demi-diamétre du cercle eſt quart de cercle comme tous les petits ſinus infinis à tous les ſinus totaux, c'eſt-à-dire, autant de petits ſinus à autant de ſinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamétre eſt égal à la figure qui eſt faite par tous les ſinus poſez à angles droits ſur la circonférence; car en la fi-gure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui ſont les



ſinus de toute la circonférence BC, font par l'extrémi-té de leur ſommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger leſdits ſinus enſorte qu'ils ſoient égaux au ſinus total ou demi-diamétre, ils forment la figure ABCD. Je fais auſſi ſur AB ſon quarré ABEF.

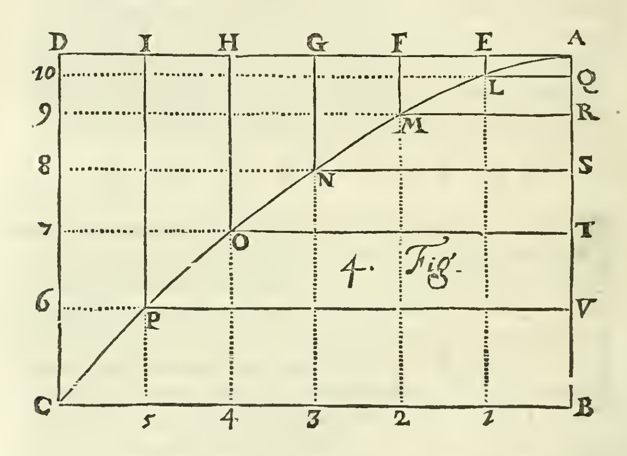
Puis

Puis je dis : Comme le demi-diamétre AB eſt à la circonférence BC, c'eſt-à-dire au quart de la circonférence, ainſi tous les ſinus ſont à autant de ſinus totaux ou demi-diamétres ; & par les infinis, comme la figure ABC ſera à la figure ABCD compoſée des infinis ſinus totaux & du quart de la circonférence BC ; donc, comme le demi-diamétre eſt à la circonference, ainſi la figure ABC eſt à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB eſt à la ligne BC, ainſi le quarré d'icelle eſt au rectangle fait de AB & BC ; donc la figure ABC eſt à la grande ABCD comme le quarré ABEF eſt au rectangle ABCD ; ainſi le quarré de AB a même raiſon au rectangle AC que la figure ABC ; & partant le quarré de AB qui eſt ABFE eſt égale à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

SOIT la Parabole BALMNOPC, le ſommet A, le diamétre AB, la ligne touchante AD, laquelle ſoit diviſée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points ſoient tirées les lignes paralleles au diamétre AB juſques à la ligne CB, ſçavoir E 1, F 2, G 3, &c. & des points où leſdites lignes coupent la Parabole, ſoient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR ſont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR ; & la ligne AR eſt à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainſi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD étant diviſée en parties égales, & les parties dicelles étant égales aux lignes ordonnées, ſçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'enſuit que chaque quarré d'icelles lignes ſurpaſſera le précedent ſelon la progreſſion des nombres impairs, que les quarrez ſeront faits des côtez differens

toûjours de l'unité, & que le côté du premier étant 1, les autres côtez feront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamétre comprifes & coupées par les ordonnées font les mêmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC; & par ainfi ces lignes font entr'elles comme les quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36 font entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prifes enfemble feront à la ligne DC prife autant de fois qu'icelles lignes, comme la fomme des quarrez (fuivant l'ordre que j'ai dit, c'eft-à-dire, à commen-



cer à l'unité, & fuivre toûjours en augmentant de l'unité) eft au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divifions en la ligne AD, c'eft-à-dire, en la préfente divifion, fix fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut fon côté, c'eft-à-dire, par fon côté, c'eft faire un cube : il eft donc vrai que la fomme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC eft à la ligne DC prife autant de fois qu'il y a defdites lignes, com-

me la ſomme des quarrez ſuſdits eſt au cube du plus grand nombre. Mais le cube eſt le triple de la ſomme des quarrez, partant le triligne CPONMLAD ſera le tiers du rectangle CDAB, & par ainſi la Parabole ABCPONMLA ſera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB; ce qui a été démontré par Archiméde d'une autre maniere.

Que ſi nous voulons conſiderer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faiſant que les portions du diamétre ſoient l'une à l'autre comme le cube au cube, il ſe trouvera que la même Parabole que deſſus, ou plûtôt le dehors d'icelle COAD, ſera au rectangle ABCD comme la ſomme des cubes à un quarré-quarré, c'eſt-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamétre, c'eſt-à-dire, les petites lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC ſont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il ſe trouvera que la ſomme de toutes ces lignes ſeront à la ligne CD priſe autant de fois, comme la ſomme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'eſt-à-dire, comme 1 à 5, & par ainſi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5; & de cette ſorte on pourra continuer & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela ſe peut faire de toutes les puiſſances juſques où on voudra.

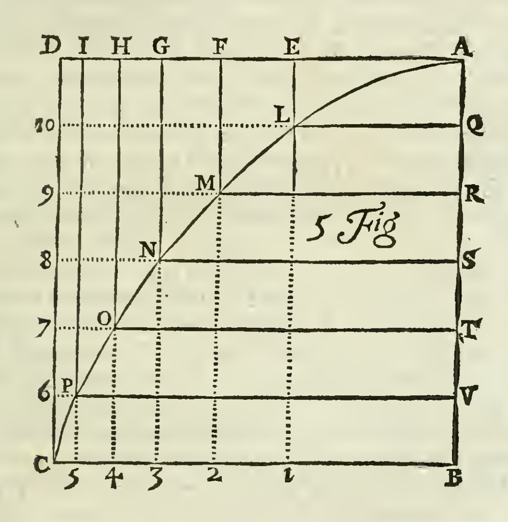
Quant au ſolide de notre Parabole, il ſe fait en feignant que tout le rectangle tourne ſur ſon axe, & qu'il ſe fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la premiére partie EAB1 ſe peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres ſe nomme Rouleau, parce que nous les devons conſidérer chacune à part, & ceci eſt pour les grands cylindres; mais en conſidérant les petits, comme la révolution que fait EAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui eſt au dedans de la Parabole, & ne conſidérons que ce

qui eſt dehors ; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui ſont dans la Parabole ne peuvent faire une partie auſſi grande que fait le rouleau D I 5 C ; & par ainſi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'eſt de nulle conſidération dans les indiviſibles.

Et par les petites lignes, c'eſt-à-dire par les portions du diamétre, nous conſidérons l'eſpace qui eſt hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres ſont entr'eux comme leurs baſes, c'eſt-à-dire, comme leurs cercles ; mais les cercles ſont entr'eux comme le quarré du demi-diamétre de l'un au quarré du demi-diamétre de l'autre : comme en notre figure le quarré de la ligne AE eſt au quarré de AF comme le premier quarré au ſecond quarré, & le quarré de AF eſt à celui de AG comme le ſecond quarré au troiſiéme, &c. Mais un quarré ſurpaſſe ſon prochain de deux fois ſon côté, ſçavoir le côté du moindre quarré, plus l'unité : il arrive donc que toutes les lignes, ſçavoir AE, EF, FG, GH, HI, ID ſont toutes differentes des quarrez, c'eſt-à-dire, chacune priſe deux fois plus l'unité ; or toutes ces unitez ne ſe conſiderent point dans les indiviſibles comme choſe finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un côté chacune, puis après nous diſons que les petites lignes EL, FM, GN, & les autres ſont entr'elles comme des quarrez ; nous les conſiderons comme des quarrez, & diſons que l'eſpace ELQ vaut deux côtez d'un quarré par ſon quarré EL, & le quarré de FM par le double de ſon côté FA fait l'eſpace FMR, & pareillement le quarré de GN par deux GA fait l'eſpace GNS, &c. Or un quarré par deux fois ſon côté vaut deux fois le cube ; donc toutes ces petites lignes enſemble, ou l'eſpace qu'elles contiennent hors la parabole ſont comme deux fois la ſomme des cubes au quarré de CD pris au-

tant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du même CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considerer ABCD, ou la Parabole CPOMAB se tournant sur son axe comme la precedente, mais avec cette difference, que la ligne AB est divisée en parties égales entr'elles. Nous considerons le solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle duquel le demi-diamétre est la ligne DA, les petits cy-



lindres ont pour demi-diamétre de leurs cercles les lignes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entre eux comme les quarrez de leurs demi-diamétres : or les

quarrez de ces petites lignes ſont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, ſçavoir en égale difference de l'unité, c'eſt-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes ſont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainſi le quarré de LQ étant 1, celui de MR vaudra 2, celui de NS 3, celui de OT vaudra 4, & celui de RV vaudra 5. Or les cylindres étant entr'eux comme les quarrez des demi-diamétres de leurs baſes ou cercles, il s'enſuit que tous les quarrez de ces petites lignes ſont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la ſomme de la ſuite des nombres naturels, à commencer à l'unité, ſont au quarré du dernier.

Mais le conoïde parabolique, c'eſt-à-dire, le ſolide fait par la révolution de CNLAB, eſt au cylindre total, ſçavoir à celui qui eſt fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande priſe autant de fois; partant le conoïde parabolique eſt au cylindre, comme la ſomme des nombres, c'eſt-à-dire le triangle, eſt au quarré, ou bien comme la moitié à ſon tout; car la ſomme des nombres eſt au quarré (en terme d'indiviſible) comme la moitié au tout; comme ſi la ſomme eſt 10 triangle de 4, le quarré eſt 16, dont la moité 8 eſt excedée de 2 par ledit triangle. Or cela paſſe pour être la moitié de l'autre; car ſi on continuoit dans la ſuite des nombres on verroit que le triangle excederoit toûjours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut conſiderer la figure ABCD comme faiſant ſon tour ſur AD, lors la ligne CD ſera le demi-diamétre de la baſe ou cercle du cylindre total: les lignes PI, OH, NG, MF, LE ſont les demi-diamétres du cercle ou baſe de chacun de leurs cylindres. Or par la proprieté de la Parabole, la ligne EL eſt à FM comme le quarré au quarré, & ainſi toutes les autres petites

lignes de ſuite ; partant le quarré de EL ſera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré-quarré, & ainſi toutes les autres petites ; donc toutes enſemble elles ſeront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes, c'eſt-à-dire, comme la ſomme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle eſt la raiſon du ſolide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont entr'eux comme 1 à 5.

Maintenant nous conſiderons que la figure tourne ſur la ligne CD parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne AD eſt le demi-diamétre de la baſe ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P ſont chacune le demi-diamétre du cercle ou baſe de leur cylindre qui ſont l'une à l'autre comme leurſdites baſes ou cercles, & les cercles ſont entr'eux comme les quarrez deſdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes ſeront au quarré de la grande ligne priſe autant de fois, comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raiſon des petits quarrez aux grands quarrez, laquelle je cherche par une grandeur qui leur ſoit égale, & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de QL moins le rectangle de Q 10 QL pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9, & celui de MR moins le rectangle de 9 RM pris deux fois, & ainſi des autres juſques à l'infini. Or faiſant la comparaiſon, nous diſons que les quarrez de Q 10 & QL comparez au ſeul quarré Q 10 font égalité de raiſon entre les deux grands qui ſont égaux : le même ſoit entendu de tous les autres quarrez. Les grands étant égaux, il ne reſte qu'à connoître la valeur des petits LQ, MR, &c. Mais nous avons vû ci-devant qu'ils ſont au grand quarré comme la moitié au tout : ſi donc nous joignons un tout avec ſa moitié, & le comparons

à un autre tout, nous ferons une raiſon de 3 à 2. Poſons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui eſt composé du grand & de ſa moitié vaudra 3 ; partant la raiſon ſera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2 ; & pourſuivant, on ôtera ce qui étoit de trop dans les deux quarrez mis ci-deſſus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q 10 QL étoit de trop pardeſſus le quarré L 10, & ainſi des autres ; il faut donc ôter les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour même hauteur Q 10, donc ils ſeront entr'eux comme leurs baſes ou petites lignes, & les ſolides entr'eux comme leurs baſes. Mais nous avons vû que ce ſolide fait par le tour de la parabole étoit le tiers du cylindre total : or il faut ôter deux fois le rectangle, partant il faudra diminuer de deux tiers la raiſon que nous avons trouvée de 3 à 2, & mettant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{9}{6}$ on en ôtera $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$, & reſtera $\frac{5}{6}$ pour la valeur de CAB tourné ſur DC, & le reſte au cylindre entier, ſçavoir CAD, vaudra $\frac{1}{6}$ du grand cylindre ABCD.

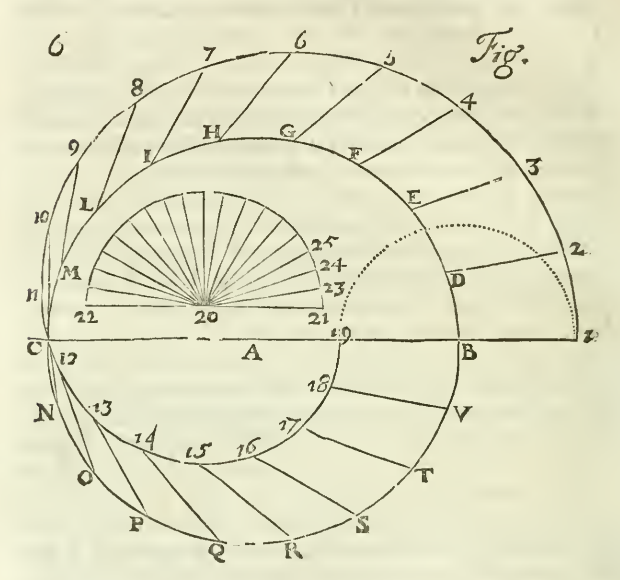
DE LA CONCHOÏDE.

LA Conchoïde ſe fait, quand d'un point on tire pluſieurs lignes qui coupent une même ligne ſoit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne ſont toutes égales, telles que ſont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle CGBR, diviſé (ſelon la regle des indiviſibles) en parties infinies égales, & par icelui a été compoſée la Conchoïde 19C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle juſques à ladite Conchoïde ſont toutes égales. Or toutes ces lignes qui diviſent la circonference du cercle commençant au point C & finiſſant

finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divise tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoique dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de CB. En après, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarrez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarrez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarrez de CB, B 1, plus le rectangle deux fois sous CB B 1; le quarré C 19 est égal aux quarrez de CB, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonference du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit être égale à B 1 qui part de la même circonference, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarrez CB, B 1 à deux fois le quarré CB, & prenant la moitié, le quarré CB + le quarré B 1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrez CB, B 1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré CB + le quarré 20 21 sont au quarré CB; ainsi l'espace du cer-

cle & demi-cercle enſemble ſont à l'eſpace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde eſt au cercle comme le quarré CB + le quarré B1 ou leurs

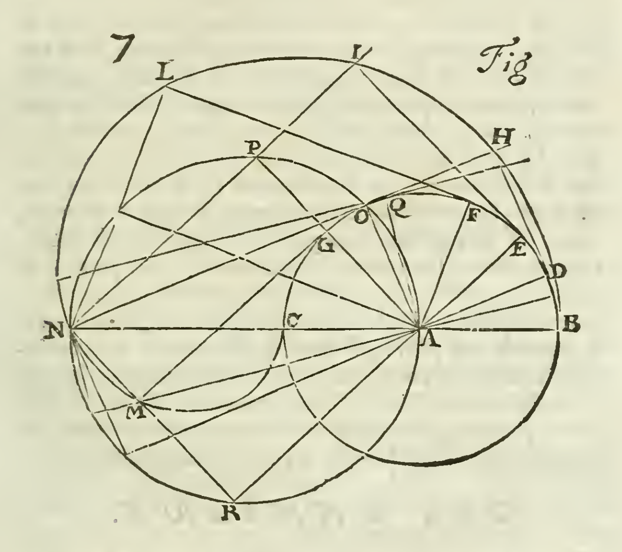


ſecteurs, eſt au quarré CB; par ainſi, toute la Conchoïde eſt au cercle en même raiſon que le cercle & demi-cercle eſt au même cercle; & partant la Conchoïde eſt égale au cercle & demi-cercle pris enſemble.

Conchoïde.

SOIT la baſe d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre eſt A; le ſommet du cône eſt en l'air, avec telle obliquité, que de ce ſommet la perpendicu-

ſaire tombe ſur le point N. Nous ſuppoſons par les indiviſibles, que par tous les points du cercle ſoient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous diſons que ſi du ſommet du cône on tire une perpendiculaire ſur chacune de ces touchantes, & que ſi du point N ſur lequel tombe la perpendiculaire tirée du ſommet, on tire une ligne à ce même point de la tou-



chante, l'angle ſera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui paſſe par l'extrémité de chacune deſdites touchantes & où ſe fait le ſuſdit angle droit, ſçavoir la ligne BHILNMC, ſe trouve être une Conchoide.

Pour le prouver, il faut conſtruire un cercle qui ait

pour diametre NA, lequel cercle ſoit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes compriſes entre ſa circonférence APNR & la ligne BHILNMC, ſont toutes égales entr'elles ; nous prouvons que AOHD eſt un parallelogramme ; car l'angle D eſt droit, puiſque DH eſt touchante & AD demi-diametre ; l'angle H eſt auſſi droit pour avoir été tiré tel du point N ſur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du ſommet du cône ; l'angle O eſt droit pour être fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quatriéme OAD le ſera auſſi ; & partant c'eſt un parallelogramme, & les côtez oppoſez ſont égaux ; & par ainſi AD ſera égale à OH compriſe entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD eſt égale à AB pour être toutes deux le rayon d'un même cercle. Paſſons outre, & conſiderons PI EA. L'angle E eſt droit, étant fait par la touchante ; l'angle I eſt droit, ayant été fait tel par la ligne NI ; l'angle P eſt droit, comme étant fait dans le demi-cercle, & partant le quatriéme l'eſt auſſi, & les côtez oppoſez du parallelográmme, ſçavoir PI & AE ou ſon égale OH, ſont égaux ; & partant AB, OH, PI ſont égales, & ce ſont les lignes compriſes entre les deux circonferences, ſçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le même de toutes les autres lignes ; & partant cette ligne courbe eſt une Conchoïde.

DES ANNEAUX.

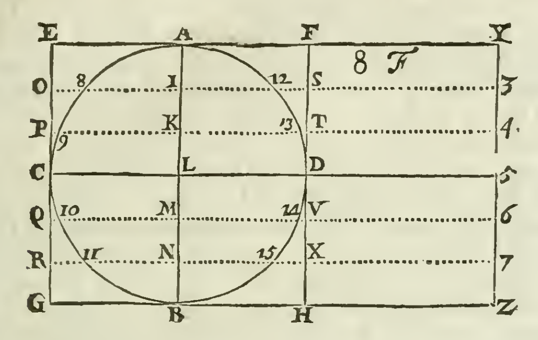
SI on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cet exemple) & qu'on faſſe tourner le tout ſur un des côtez du parallelogramme, le ſolide fait par ce parallelogramme eſt au ſolide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme eſt au plan de la figure.

Nous expliquerons ceci par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme EFHG : au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au côté FH du parallelogramme ; la nature de cette ligne doit être telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne FH, dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre, & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus*, c'est-à-dire, qu'il se diminuë peu à peu ensorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui étant remplis au grand solide sont de plus en icelui qu'au petit ; il faut donc tirer lesdits vuide du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit, & tout se mesure par les quarrez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, & je considére que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution, & que le demi-cercle fait une figure differente de ce cylindre, de ces petits espaces qu'il faut ôter du cylindre. Considérant les quarrez du cylindre, je dis que le quarré de IS est égal aux quarrez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12 ; le quarré TK est égal aux deux quarrez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T ; le même se doit entendre des autres quarrez appartenant au cylindre AFHB. Mais si nous ôtons chaque quarré qui compose le vuide, & qui sont hors le cercle de chacun des quarrez du solide, il nous restera tout le dedans du cercle, c'est-à-dire, du petit solide. Si donc du quarré SI on ôte le quarré S 12, il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I : ceci est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13, il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle

K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ai de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle, S 12 I je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par-là j'ai le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considere ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la même ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarrez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarrez I 8, K 9, & les autres qui sont dans le demi-cercle, & je dis ainsi : Le quarré S 8 est égal aux deux quarrez SI, I 8 plus deux fois le rectangle S I 8; le quarré T 9 est égal aux quarrez TK, K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres. Or il faut ôter de tous ces quarrez les quarrez du cylindre, sçavoir de SI, TK, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle S I 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres, & ceci se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle SI 12 que j'avois déja une fois, & partant je l'ai deux fois. Au second demi-cercle, les quarrez 8 I, 9 K étant ôtez il m'est resté deux fois le rectangle S I 8 qui est le même que le précedent, & par ainsi j'aurai quatre fois le rectangle S I 8; donc quatre fois ce rectangle sera au quarré de SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou côtez du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul SO par 8 12 est au quarré SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total; ils seront donc entre-

eux comme leurs bafes ou lignes, c'eft-à-dire, comme l'efpace de ces lignes comprifes dans le cercle eft à l'efpace des grandes lignes qui compofent le parallelogramme : donc comme le folide au cylindre, ainfi le plan du folide eft au parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.

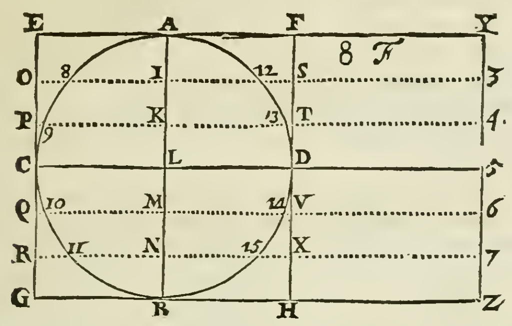


Nous trouverons la même chofe en faifant tourner toute la figure fur la ligne YZ. Il faut premierement examiner ce que fait ABZY par fa révolution, & ce qu'il differe d'avec ABHF. Le quarré ZB vaut les quarrez de ZH & HB plus deux fois le rectangle ZHB; le quarré 7N eft égal aux quarrez 7X, XN plus deux fois le rectangle 7XN, & ainfi de chacun des autres grands quarrez. Il en faut ôter tous les quarrez qui compofent l'efpace HY, fçavoir le quarré FY, S3, T4, & les autres, lefquels étant ôtez, refteront le quarré SI plus deux fois le rectangle 3SI, & le quarré de TK plus deux fois le rectangle 4TK; prenant le quarré SI, & le joignant à l'un des rectangles, je ferai le rectangle 3IS, & le rectangle 3SI; puis à 4T, fi on joint le quarré de KT à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4KT, & le rectangle 4TK. Il faut retenir tout ceci, & paffer

à la confideration du folide qui fe fait par la revolution de AB GE tournant fur même YZ. Nous difons que le quarré de 3 O eft égal aux deux quarrez de 3 I & IO plus deux fois le rectangle 3 IO ; que le quarré 4 P vaut les quarrez de 4 K ; KP plus deux fois le rectangle 4 K P, & ainfi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut ôter tous les quarrez qui rempliffent l'efpace ABZY, fçavoir les quarrez 3 I, 4 K, 5 L, & les autres ; & partant il refte le quarré O I plus deux fois le rectangle 3 I O ; & ajoûtant au rectangle 3 S I qui étoit refté au calcul de l'autre cylindre le quarré OI, je ferai le rectangle 3 IO ; & par ainfi dans le précedent cylindre j'aurai deux fois le rectangle 3 I S ; & dans ce dernier, le quarré OI étant ôté, il refte deux fois le rectangle 3 IO qui eft le même que 3 I S ; partant le tout enfemble fera quatre fois le rectangle 3 I O ; partant le quadruple du rectangle 3 IO fera au quarré de EY, comme le cylindre, ou plûtôt le rouleau GEFH eft au cylindre total EGZY.

Il faut maintenant confiderer ce que fait le cercle par fa révolution, tournant fur la même ligne YZ, & le comparant au cylindre total ; ce qui fe doit faire en confidérant une portion, fçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premierement la moitié A 12 15 B, & dirons : Le quarré de 3 I vaut les quarrez 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I ; le quarré de 4 K vaut les quarrez 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainfi des autres. De cette équation il faut ôter les quarrez 3 12, 4 13, & tous les autres qui font hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajoûte le quarré I 12, & je fais le rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajoûte pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K, & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K ; ce qu'il faut retenir afin de l'ajoûter

à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarrez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8 ; le quarré 4 9 vaut les quarrez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajoûter tout ceci à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I ; & ajoûtant au rectangle 3 12 I le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ai le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ai trouvé en la discussion de la seconde



moitié (les vuides étant ôtez, c'est-à-dire, les quarrez de I 3, K 4 &c.) le quarré 8 I (que j'ai ajoûté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le même que 3 I 12 ; tellement que j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de EY comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur YZ, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au même quarré EY comme le solide du cercle est au cylindre total fait par EGZY.

Il faut considerer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré EY, ainsi le rouleau

EGHF au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 I O trouvé dans le rouleau GF, est au grand quarré EY, comme le même rouleau GF au grand cylindre GY. Ensuite j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand quarré EY, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est consequent en l'une & en l'autre des comparaisons ; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux : mais les rectangles sont tous d'égale hauteur ; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau : or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure ; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF ; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considerons si les solides sont égaux ou non. Je parlerai premierement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH : sa base est un cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH ; sa hauteur est la ligne HF : au lieu du cercle je prens ce qui lui est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diametre pour un côté, & la moitié de la circonference pour l'autre ; & par ainsi j'ai trois côtez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je pretens être égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonference d'un cercle duquel le demi-diametre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur ; il faut donc considerer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la

demi-circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH : dans l'autre ſolide j'ai les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diametre la ligne LD. Mais dans l'une & dans l'autre j'ai deux lignes communes, ſçavoir GH & HF, entre leſquelles il ne peut avoir autre raiſon que d'égalité, puiſqu'elles ſont égales, & partant on les peut ôter, & la compoſition des raiſons demeurera entre la circonference d'un cercle & la demi-circonference de l'autre. Mais les circonferences ſont entr'elles comme leurs diametres : or le diamétre total du cercle entier qui eſt DC eſt égal au demi-diametre GH; partant la circonference entiere appartenant à DC ſera égale à la demi-circonference appartenant au demi-diametre GH; & par ainſi le cylindre ſera égal au ſolide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſiderer toute la figure, lorſque le parallelogramme EYZG ſe tournant ſur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau GF eſt égal au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui aura pour demi-diamétre la ligne L 5. Je dis encore que l'anneau (c'eſt-à-dire le ſolide qui ſe fait par la révolution du cercle quand le tout roule ſur YZ) eſt égal au ſolide qui a pour baſe le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui a pour demi-diametre la ligne L 5.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre ſolides ſuivans ſont proportionnaux, ſçavoir le rouleau qui ſe fait quand le parallelogramme EFHG roule ſur la ligne YZ. Le ſecond eſt l'anneau qui ſe fait par le cercle quand le grand parallelogramme GY tourne ſur la ligne YZ. Le troiſiéme eſt celui qui a pour baſe le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre eſt la ligne ZB.

Et le quatriéme est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5, & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisiéme, le second par consequent doit être égal au quatriéme. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH est au quarré de GZ, ainsi le rouleau GF est au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour base le parallelogramme EF HG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5, est égale au même grand cylindre GY.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur : je considere quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne GZ qui est le demi-diametre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est HF. Mais d'autant que nous avons besoin de trois côtez en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle duquel la ligne L 5 est demi-diametre, lequel solide a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre. Pour avoir trois côtez au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diametre qui représente son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diametre GZ, & la demi-circonference du même cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archiméde.)

J'aurai donc trois côtez ou lignes au grand cylindre, sçavoir GZ, HF, & la demi-circonference du cercle dont GZ est le demi-diametre. Il y a donc dans ces deux solides deux côtez qui sont semblables, sçavoir HF en chacun d'iceux ; & partant ils ne servent de rien pour la

composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ antécedent & consequent, & la circonference entiere du cercle qui a L 5 pour demi-diametre, à la demi-circonference du cercle qui a GZ pour demi-diametre. Mais d'autant que les circonferences sont entr'elles comme leurs diametres, au lieu des circonferences je prens le diametre entier qui est deux fois L5, & pour la demi-circonference je pose son demi-diametre GZ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne CH à GZ, & de la ligne L 5 doublée à la ligne GZ.

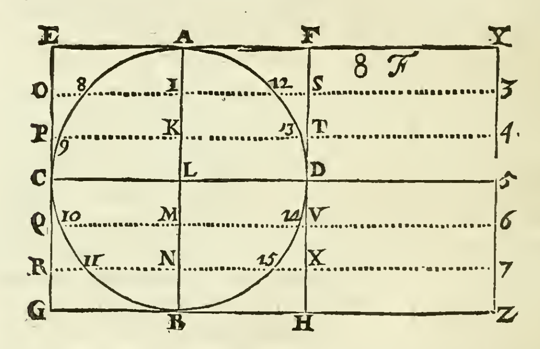
Or si on multiplie les antécedens l'un par l'autre, & pareillement les consequens, on aura ladite raison composée; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L5 ou ZB en ladite raison composée; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB: or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ; donc le rouleau & le solide auront même raison au cylindre total; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le même parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisiéme dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatriéme seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tour-

ne ſur la ligne YZ : l'autre ſolide eſt celui qui a pour baſe le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference du cercle duquel le demi-diamétre eſt la ligne L 5.

Il faut maintenant voir ce qui ſe fait quand le roulement ſe fait ſur la ligne AB. Nous avons ici repreſenté la figure comme un cercle ; le même ſe doit entendre d'une ellipſe : & partant il faut voir ce que fait la ſphére qui ſe forme par la révolution du demi-cercle ABC ſur le diametre AB, ou le ſphéroïde qui ſe forme par la révolution de la demi-ellipſe ſur la même ligne AB.

Il faut entendre que le quarré I 12 eſt au quarré de K 13, comme le rectangle BIA eſt au rectangle BKA,



& le quarré K 13 eſt au quarré LD, comme le rectangle BKA au rectangle BLA, & ainſi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipſe. Or, tant la ſphére que le ſphéroïde qui ſont formez par le roulement, ſont au cylindre qui ſe fait en même temps, comme tous les quarrez I 12, K 13 & autres petits au grand quarré BH pris autant de fois. Mais pour la raiſon des petits quarrez, j'ai pris la raiſon des petits rectangles qui eſt la même : il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits

rectangles, afin de laisser les grands quarrez. Je prendrai le rectangle BLA qui vaut le quarré de LD ou MV, sçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle BIA avec le quarré de LI est égal au quarré de LA ou LD son égal, ou quelqu'autre des grands quarrez; le rectangle BKA plus le quarré de LK est égal au même grand quarré LD, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez LI, LK qui vont toûjours en diminuant, & par ainsi font une pyramide que nous sçavons être la troisiéme partie de son parallelipipede ou cube. Si donc nous ôtons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphére ou sphéroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.

DE L'HYPERBOLE.

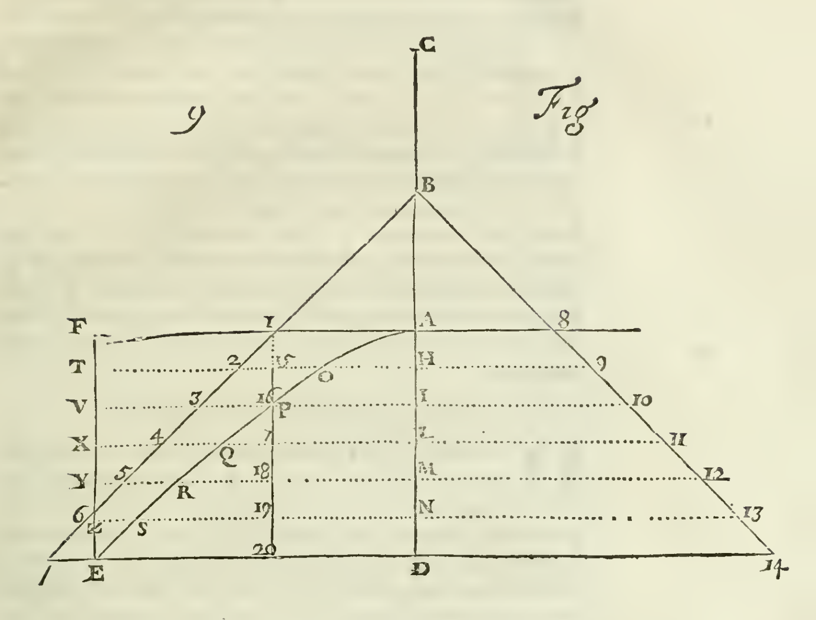
DANS l'Hyperbole AEDBC le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée; AC est le diametre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'hyperbole. Il faut voir quand l'hyperbole tourne sur la ligne AD, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est-à-dire, le solide qui se fait quand le parallelogramme FD tourne aussi sur l'axe AD.

Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarrez ensemble compris dans l'espace AED, sçavoir le quarré de HO, de IP, LQ, & les autres, sont au quarré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarrez entr'eux avec le grand.

La proprieté de l'hyperbole eſt que le quarré HO eſt au quarré IP, comme le rectangle CHA eſt au rectangle CIA; le quarré IP eſt au quarré LQ, comme le rectangle CIA au rectangle CLA, & ainſi des autres; & par ainſi tous les petits rectangles ſont au grand rectangle CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrez ſont au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour ſçavoir quelle eſt cette raiſon, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle C H A je poſe le rectangle CAH plus le quarré HA; au lieu du rectangle CIA, je poſe le rectangle CAI plus le quarré IA, & ainſi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera enſuite la comparaiſon, premierement des rectangles CAH, CAI, & des autres petits entr'eux & au grand CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles ſont de même hauteur, ſçavoir CA, & par ainſi, ils ſeront entr'eux comme leurs baſes. Nous avons donc pour les petits rectangles un ſolide qui a pour hauteur la ligne CA, & pour baſe tous les nombres naturels qui compoſent un triangle. Si au lieu de la ligne CA je prens ſa moitié AB, j'aurai un ſolide qui aura pour baſe le quarré de AD, & pour hauteur la ligne BC; ceci eſt pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, ſon ſolide a pour hauteur DC, & pour baſe DA pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'eſt-à-dire le quarré DA; partant les deux ſolides ont tous deux le même quarré DA pour baſe; & partant nous n'avons à conſiderer que leur hauteur DC pour le grand, & BC pour le petit; partant tous les petits rectangles ſont au grand rectangle pris autant de fois, comme DC eſt à BC.

Il reſte maintenant à conſiderer comment tous les petits quarrez ſont au même grand rectangle. Or tous

les



petits quarrez, ſçavoir ceux de AH, AI, AL, AM, AN, ſont une pyramide qui a pour baſe le quarré de AD, & pour hauteur la même AD. (car les quarrez diminuez à l'infini ſont une pyramide) Mais la pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede; c'eſt-à-dire du ſolide qui a pour baſe le même quarré que la pyramide, & qui ſe hauſſe autant que la pyramide, ſçavoir de la ligne DA; donc au lieu de la hauteur DA, j'en prens le tiers, & j'ai le ſolide qui a pour baſe le quarré DA, & pour hauteur le tiers de DA; joignant donc ce tiers de DA

avec BC que j'avois trouvé devant, j'ai le tiers de DA plus BC ou AB son égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élegamment, je dirai : Comme le tiers de AG (car j'ai ajoûté à AC la ligne CG égale à BC) avec le tiers de DA qui est comme le tiers de DG à la ligne DC; ainsi le conoïde hyperbolique ou petit solide est au cylindre fait par AFED. Que si nous voulons avoir la raison du cône qui se feroit, si le triangle AED se tournoit sur la ligne DA (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE.) Euclide dit que le cône est le tiers de son cylindre : prenant donc le tiers de la ligne DC, elle sera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

Autre spéculation sur l'Hyperbole.

DU centre de l'Hyperbole B j'ai tiré les asymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un asymptote à l'autre infinies paralleles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 est égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainsi tous ces rectangles sont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne sur DA, il se fait un cône qui est égal à tous les quarrez qui sont dans le plan, sçavoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrez j'en ôte premierement le vuide 1 B A, & tout ce qui est au dehors du plan EDA, il me restera le conoïde hyperbolique qui se fait par EDA tournant sur DA. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de HO; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré de IP; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de LQ, & ainsi des autres. Mais chacun des re-

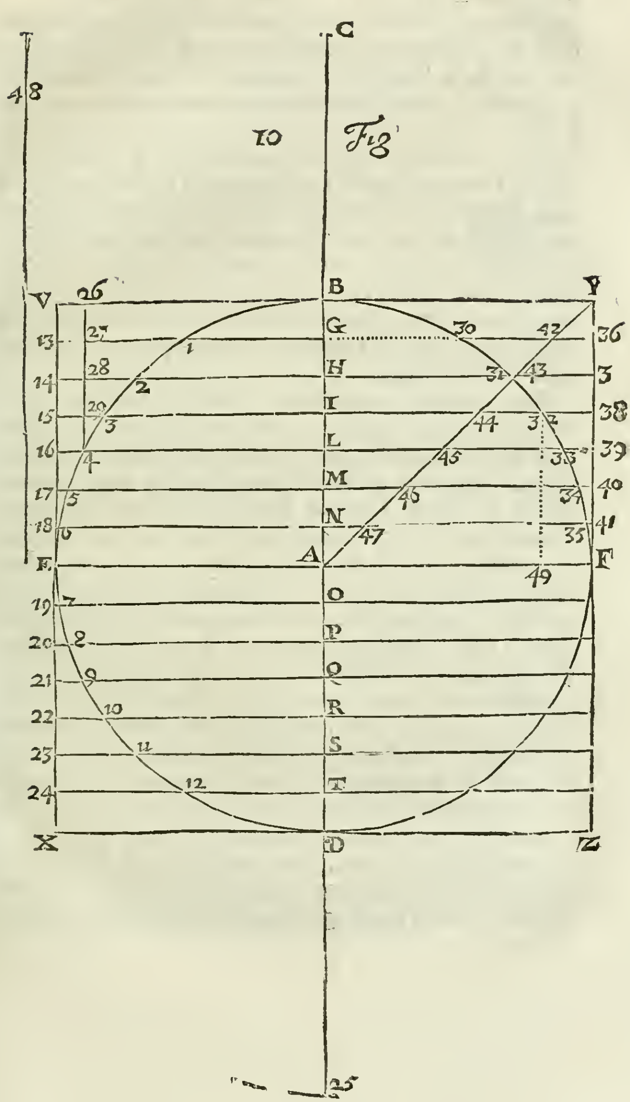
ctangles eſt égal au quarré de A 1, lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, ſera le cylindre 1 20 DA; partant ôtant ce cylindre, il reſtera les quarrez de HO, IP, LQ, qui ſont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

PROPORTION DE LA SPHERE ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonſcrit, & au Cône inſcrit.

ON conſiderera ici ce que fait la figure qui eſt en la page ſuivante tournant ſur BD, & ne prenant que la portion 26 BL4 que fait le cylindre & la portion de la Sphére ou Sphéroïde qui ſe fait par la révolution de la figure 4 1 BL. Le quarré de G 1 & les autres petits ſont au grand quarré 4L pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la ſphére ou ſpéroïde (car c'eſt la même raiſon en l'une & en l'autre) eſt au cylindre 26 BL4. Il eſt donc queſtion de chercher la raiſon de ces petits quarrez au grand quarré. Or tous les petits quarrez ſont au grand, comme les rectangles DLB, DIB, DHB, DGB ſont au grand rectangle DLB; partant tous leſdits petits rectangles ſont au grand rectangle DLB pris autant de fois, comme tous les petits quarrez ſont au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raiſon des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vaillent autant, & je dis ainſi : Le rectangle DBL moins le quarré BL vaut le rectangle DLB; le rectangle DBG moins le quarré BG vaut le rectangle DGB; le rectangle DBH moins le quarré BH vaut le rectangle DHB; le rectangle DBI moins le quarré BI vaut le rectangle DIB; partant dans les petits rectangles je trouve un ſolide qui a pour hauteur

DB, & pour baſe les petites lignes LB, LG, LH, LI qui ſont la ſomme de nombres naturels qui eſt un triangle lequel eſt toûjours la moitié de ſon quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainſi j'aurai un ſolide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ai ôté la moitié de DB) & pour baſe le quarré de LB comme l'autre ſolide. Pour le grand rectangle, ſçavoir DLB pris autant de fois, il compoſe un ſolide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour baſe le même quarré LB. Les baſes étant égales, il n'y a que les hauteurs à conſidérer, ſçavoir DB & BL. Mais il faut ôter des petits rectangles les quarrez qui étoient de moins: or ces petits quarrez compoſent une pyramide qui a pour baſe le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallelipipede qui lui ſoit égal: je retiens le même quarré LB, & pour hauteur le tiers de LB, qui eſt la hauteur du parallepipede égal à la pyramide (car toute pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede.) Il faut ôter ce ſolide de l'autre qui a même baſe, & partant il ſuffit d'ôter la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le ſolide fait par les petits rectangles. Il reſte maintenant à chercher le ſolide du grand rectangle. Or ce ſolide n'eſt autre que celui qui a le quarré LB pour baſe, & DL pour hauteur. Celui-ci n'a point d'autre baſe que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur DL en celui-ci, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car DA moins le tiers de LB vaut le tiers de la ligne 25 L) eſt à la ligne DL, ainſi le ſolide fait par la figure 42 BL eſt à ſon cylindre fait par le parallelogramme 264 LB.

Que ſi nous voulons avoir le cône qui ſe feroit par la même révolution, ſi on tiroit une ligne B 4. Nous ſçavons que le cône eſt le tiers de ſon cylindre; je pren-



10 Fig
C
48
V
26
B
Y
G
H
I
L
M
N
A
E
F
O
P
Q
R
S
T
X
D
Z
25

drai donc le tiers de DL (laquelle repréſente le cylindre) & je dirai que comme le tiers de la ligne 25 L eſt au tiers de la ligne DL, ainſi notre ſolide eſt au cône: or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entiere à la ligne entiere; partant le ſolide ſera au cône, comme la ligne 25 L eſt à la ligne DL; ce qu'il falloit trouver. Dans la même figure il faut conſiderer que, lorſqu'elle tourne ſur la ligne AB quand le cylindre VEFY ſe fait, il ſe fait auſſi un ſolide par la révolution du plan ABF, qui s'appelle un creux. Il ſe fait encore un autre ſolide par le plan B 30 FY. Nous en avons encore un autre qui ſe fait ſur le triangle AYB qui eſt un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous leſdits ſolides.

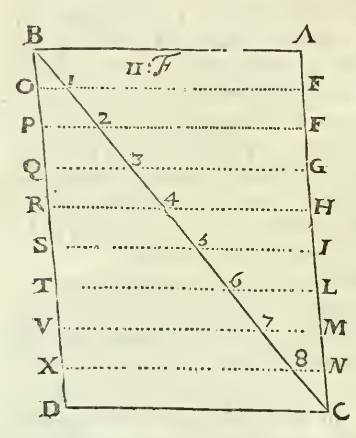
Les diviſions étant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures ſont entr'elles comme les quarrez de ces lignes ſont entr'eux. Or pour ce qui eſt du cône que nous voulons égaler au ſolide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total eſt coupée en deux également au point I, ſçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'ôte le quarré I 32, il me reſte le rectangle 15 32 38 qui appartient au ſolide B 30 FY.

Puis après nous entrons dans les proprietez de l'ellipſe; (car ce que je conclurai s'entendra du cercle comme de l'ellipſe.) Le diametre EF, le diametre BD & le côté droit du diametre EF, ſçavoir la ligne 48, ſont trois proportionelles; & la premiere EF eſt à la troiſiéme 48, comme le quarré de la premiere EF eſt au quarré de la ſeconde DB. De plus, le rectangle E 49 F eſt au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF eſt à la ligne 48 côté droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F eſt au

quarré 49 32, comme le quarré EF eſt au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je poſe ſon égale BY ; donc le quarré BY eſt au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY eſt au quarré BA, comme le quarré I 44 eſt au quarré IA ; partant le rectangle 15 32 38 ſera au quarré IA, comme le quarré I 44 eſt au même quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 ſera égal au quarré I 44; & par ainſi le cône ſera égal au ſolide de B 30 FY. Mais le cône eſt le tiers de ſon cylindre; ſi donc j'ôte le tiers du cylindre total, il reſtera les deux tiers pour le ſolide ou le creux qui ſe fait par le plan AFB, qui eſt ce qu'on cherchoit.

Or, non-ſeulement le cône eſt égal au ſolide extérieur, mais chaque partie eſt égale à chaque partie ; c'eſt-à-dire que le ſolide fait par N 47 46 M, eſt égal au ſolide fait par 35 41 40 34; le ſolide 45 LM 46 eſt égal au ſolide 33 39 40 34, & ainſi des autres. Par tout ceci nous venons à la connoiſſance du centre de gravité de tous ces ſolides; car le centre de gravité du cylindre AY eſt au milieu de la ligne AB : or le centre de gravité du cône eſt aux $\frac{3}{4}$ de la ligne AB ; le centre de gravité du ſolide qui lui eſt égal, ſe trouve au même lieu dans la ligne BA aux $\frac{3}{4}$ d'icelle; partant, ſelon Archiméde, le centre de gravité de la ſphére ou ſpéroïde reſtant du cylindre ſera connu, parce qu'il eſt en la raiſon réciproque des deux ſolides, ſçavoir de la ſphére ou ſphéroïde, au ſolide de dehors, c'eſt-à-dire à B 30 FY, aux lignes qui ſont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit ſolide, & à la ligne qui part du centre de gravité du même grand cylindre au centre de gravité de la figure reſtante que je cherche, qui eſt de la ſphére ou ſphéroïde.

PROPORTION DU COSNE *au Cylindre.*



EN cette figure le triangle eſt au parallelogramme, comme tous les nombres naturels ſont au quarré du plus grand; c'eſt-à-dire, comme 1 à 2. Que ſi vous le faites tourner ſur la ligne BD, le cône qui ſe fera de BDC ſera au cylindre qui ſe fera ſur ABDC comme 1 à 3 ſelon Archiméde.

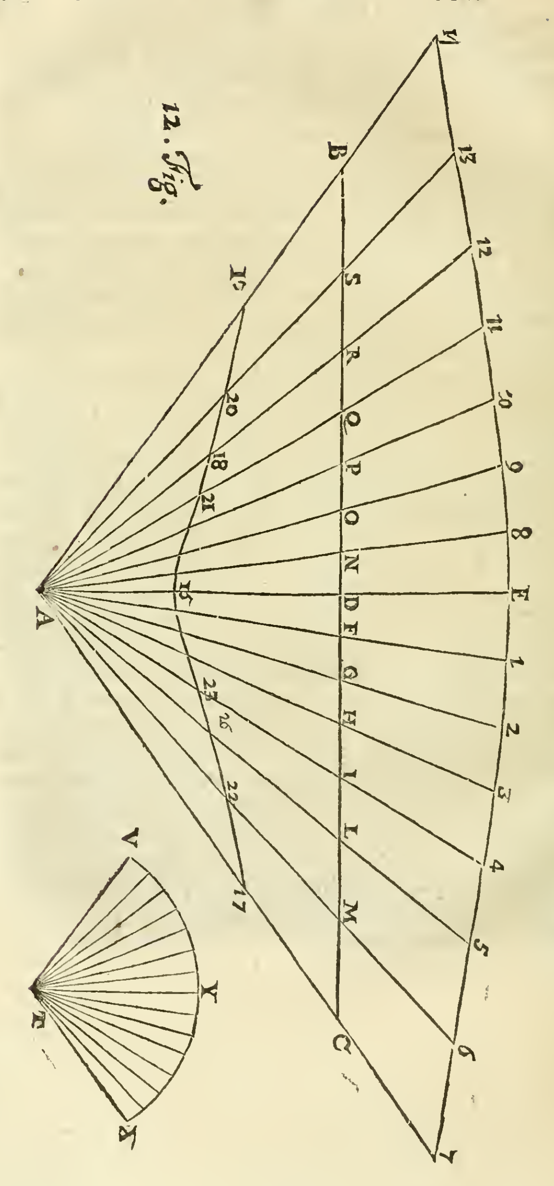
DE LA CONCHOÏDE.

NOUS conſiderons premiérement le grand triligne A 7 14. Le centre de la conchoïde eſt A; la conchoïde 14 7 eſt la premiere, & la ſeconde conchoïde eſt 16 17; la régle qui les ſépare BC; les lignes qui partent de cette régle ou ligne & qui vont aux deux conchoïdes, ſçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, ſont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 ſont égales entr'elles & aux autres ci-deſſus, ſçavoir à C 7, M 6, &c. Nous diſons donc ainſi:

Le grand triligne eſt diviſé (ſelon les indiviſibles) en ſecteurs ſemblables infinis qui reſſemblent aux triangles, mais

mais par les indivisibles nous les prenons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarrez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarrez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considerons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarrez AC, C 7 plus deux fois le rectangle AC 7 ; le quarré A 17 vaut les quarrez AC, C 7 ou C 17 moins le rectangle AC 17 pris deux fois. Tout ceci mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarrez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarrez AC, & C 7. [La petite figure qui est ici a été faite, d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarrez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont au grands secteurs ; comme les quarrez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarrez A 7, A 6, A 5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarrez AC & C 7 pris deux fois : au lieu des quarrez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la même raison entr'eux que lesdits quarrez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarrez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est ici la premiere conséquence ou conclusion.


12. Fig.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
M
N
O
P
Q
R
S
V
X
Y

Pour la ſeconde, c'eſt quand nous ôtons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un côté l'eſpace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits ſecteurs, le triangle ABC, & l'eſpace 16 17 CB. Alors l'eſpace d'une conchoïde à l'autre, c'eſt-à-dire 16 17 7 14, eſt égal à deux fois les petits ſecteurs plus deux fois l'eſpace 16 17 CB; & c'eſt ici une autre concluſion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en ôte le petit, il reſte le grand A7 14 qui eſt égal à deux fois les petits ſecteurs, au triangle ACB & à l'eſpace 16 17 CB, qui eſt une autre concluſion.

Que ſi on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle ACB, il reſtera l'eſpace 7 C B 14 qui ſera égal à deux fois les petits ſecteurs avec une fois CB 16 17, qui eſt une quatriéme concluſion.

Maintenant il nous faut voir quelle raiſon il y a entre le triangle ABC & l'eſpace B C 7 14. Cela ſe fera conſidérant le quarré A 7 duquel nous ôterons le quarré AC. Ayant donc diviſé le triligne A 7 14 en ſecteurs tous ſemblables & infinis, ainſi qu'il a été fait ci-deſſus aux autres concluſions, & ſçachant que les ſecteurs ſont entr'eux comme leurs quarrez, nous diſons que le quarré A 7 eſt égal aux quarrez AC & C 7 plus le rectangle A C 7 pris deux fois. Si j'en ôte le quarré AC, il me reſte le quarré C 7 plus le rectangle AC 7 deux fois. Il faut conſidérer quels ſolides ils font.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres ſont tous égaux; & par ainſi tous joints enſemble font un parallelipipede ou ſolide qui a pour hauteur & largeur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, ſçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajoûté les quarrez l'un à l'autre; c'eſt le premier ſolide qui ſe forme.

L'autre se fait du rectangle AC7 pris autant de fois que les susdits quarrez, & forme un solide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais sa longueur est diverse, sçavoir des lignes AC, AM, AL, & des autres qui toutes sont inégales.

Or ces deux solides se doivent mettre ensemble afin de les comparer à celui qui est composé des quarrez AC, AM & autres qui tous sont inégaux; & partant ce solide sera racourci de deux côtez. Or ce solide se peut considérer comme si j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervale AD : car alors la ligne BC sera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD sera le sinus total; & les lignes AN, AO, AP seront toutes des sécantes, & ainsi le solide sera formé des quarrez des sécantes. Or ces deux solides étant de même hauteur, sçavoir de la ligne C 7 & autres, il est aisé de les joindre ensemble, & de tous deux en faire un solide composé de tous les quarrez C 7, M 6, &c. d'une part, & de la ligne C7 multipliée par la somme des lignes AC, AM, & les autres prises deux fois (parce que le rectangle AC7 est deux fois dans le quarré A 7) c'est-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le solide qu'il faut comparer à celui-ci est fait par la somme des quarrez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes sont inégales. Nous disons donc, Comme le solide fait par la somme des quarrez AC, AM, & autres, est au solide composé des deux ci-devant mis; ainsi le triangle ABC est à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier solide les lignes C 7, M 6 me sont données, & partant leurs quarrez : de plus les lignes AC, AM, & autres me sont aussi données, d'autant que la lignes AD (que je prens pour sinus total ou demi-diametre d'un cercle que je feins être fait) m'est donnée, & la ligne DE sur lesquelles j'ai formé ma conchoïde; & par le

moyen de AD sinus total & de l'angle BAD, je connois toutes les sécantes de ce cercle que je pose être décrite sur le rayon à AD: ces sécantes sont AN, AO, AP, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarrez de AC, AM me seront donnez, puisque les lignes sont données; & ainsi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or CA, & MA sont sécante; donc par le calcul il nous sera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le second solide qui est composé de l'aggregé ou somme des quarrez des sécantes; & telle sera la raison de ABC à l'espace BC 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à un Quarré donné, & ce d'un seul trait de Compas.

ON demande qu'il soit tracé sur un cylindre droit d'un seul trait de compas un espace égal au quarré de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diametre duquel FE soit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur soit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur soit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un espace sur la superficie du cylindre. Je dis que cet espace vaut le quarré de AB.

Pour le prouver, je divise le cercle en parties infinies aux points EGHI & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points sont infinis: du point E qui est l'extrémité du diamétre, je tire à chaque point de la division des lignes droites EG, EH, EI, &

autres qui ſont dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes ſont des ſinus du quart d'une circonférence; ce qui ſe connoîtra, faiſant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diametre le double de EF; mais ici je me contente de la quatriéme partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui ſoient toutes égales à FE, elles iront juſques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle ſe trouve dans le demi-cercle ELF; & partant toutes les petites lignes ſont les ſinus du quart d'une circonférence.

Nous ſçavons que le demi-diametre du cercle eſt au quart de la circonférence, comme tous les petits ſinus ſont au ſinus total pris autant de fois. Nous ſçavons auſſi que le quarré du demi-diametre eſt égal à la figure qui eſt faite par les infini petits ſinus qui diviſent ce quart de circonférence. Or le demi-diamétre eſt FE qui eſt égal à la ligne droite AC moitié de AB; partant ſon quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les ſinus EG, EH, &c. ſont égaux aux perpendiculaires élevées des points GH, &c. juſques au retranchement fait par le compas, comme il ſera montré; & par ainſi la figure ou l'eſpace tracé par le compas qui eſt ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds poſé ſur F qui eſt un point pris en quelque endroit que ce ſoit de la ſurface du cylindre, & l'autre pied, par exemple ſur le point E, & tournant ſur la ſuperficie du cylindre tant qu'il revienne au même point E: cet eſpace compris ſur le cylindre vaut quatre fois l'eſpace compris des petits ſinus qui diviſent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il ſe peut ainſi dire. Or le cylindre eſt préſumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il

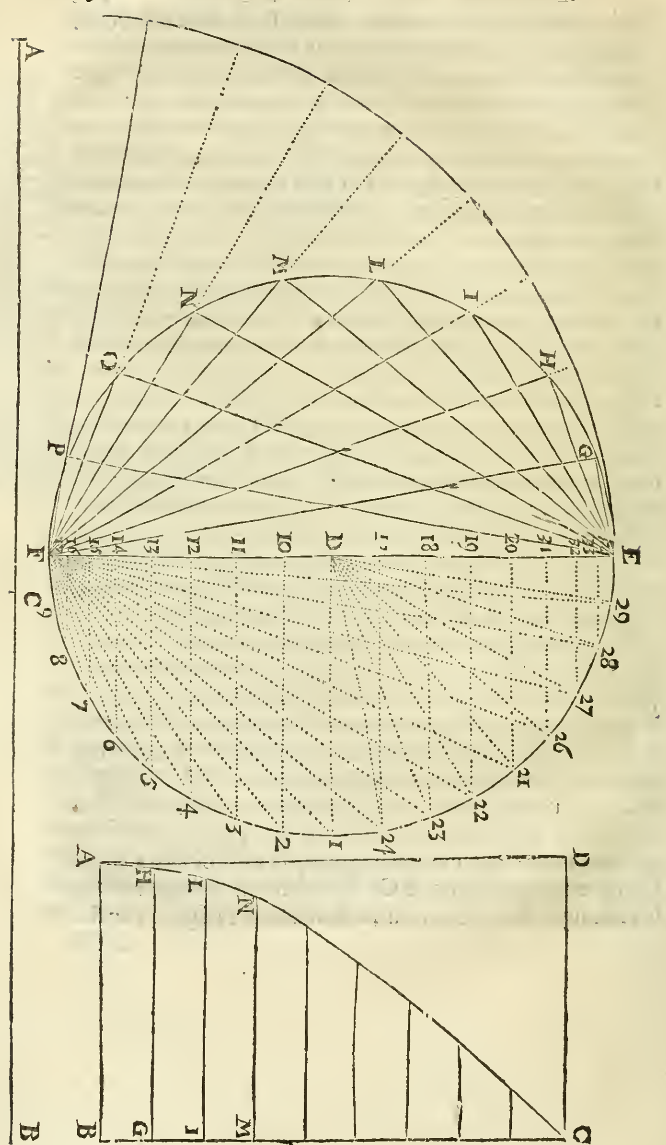
faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle FME parallele à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a été retranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour cet effet, il faut tirer la ligne FH, & concevoir deux triangles, l'un de la ligne FH & FE portée à l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un triangle rectangle qui est égal au triangle FEH; car en tous les deux triangle la ligne FH est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne FH & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celui qu'on veut montrer égal à FEH & pareillement l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit, étant dans le demi-cercle; la ligne FE qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à FE; partant la ligne EH est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne FE par la révolution du compas. Le même se prouvera de toutes les autres lignes, EG, EI, EL, EM, & autres.

On considere ici deux triangles qu'on veut prouver être égaux : l'un est FHE; l'autre a pour base FH, pour catet la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hipoteneuse sera égale à FE, puisque c'est l'ouverture du compas.

Or cette figure se trouve être la même que la troisiéme figure ci-devant, si on suppose que la circonférence EHLF est égale à BC dans la troisiéme figure, & qu'elle est divisée infiniment en sinus GE, HE; IE, & les autres, tout ainsi que la ligne BC de la troisiéme figure est divisée en sinus infinis, sçavoir GH, IL, MN, &c. Or nous devons considérer cette troisiéme figure ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles font. Par exemple, quand la troisiéme figure tourne sur la ligne BC, elle fait un cylindre avec le rectangle BD, & un autre solide avec la figure courbe

ACB


A
B
C
D
E
F
G
H
I
L
M
N
O
P

ACB. Je trouve que le cylindre eſt double du petit ſolide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me ſers de la treiziéme figure préſente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui ſont toutes égales aux premieres tirées du point E aux mêmes points, ſçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis enſuite que les quarrez de GE & GF ſont égaux au quarré de FE : il en eſt de même des quarrez de EH & HF, & ainſi des autres ; partant tous ces quarrez enſemble ſeront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrez je n'ai beſoin que de ceux qui compoſent la figure, ſçavoir des quarrez de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui ſont la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE ; partant tous ces petits quarrez ſeront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les ſolides ſont entr'eux comme tous les quarrez pris enſemble ; partant le petit ſolide fait de la figure courbe ABC en la troiſiéme figure, ſera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2 ; ce qu'il falloit démontrer.

On conſidérera encore en la même figure un autre trait de compas. Je poſe une des pointes ſur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F1EL, lequel cercle eſt la baſe mitoyenne du cylindre qu'on ſuppoſe toûjours prolongé en haut & en bas autant qu'il eſt neceſſaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'icelui eſt F1 qui eſt la ſoutendante du quart de la circonférence totale F 5 1. Or cette circonférence eſt diviſée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. ſur chacun deſquels j'éleve des perpendiculaires, comme ci-devant : des mêmes points je tire des perpendiculaires ſur le demi-diametre FD qui le diviſent en une infinité d'autant de parties inégales.

Il faut maintenant conſidérer les proprietez de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il ſe fait pluſieurs triangles rectangles dont les côtez ſont F2, F1, & la perpendiculaire ſur le point 2, laquelle eſt en l'air; le ſecond, F3, F1, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 3; F4, F1, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à meſure que la ſoutendante diminuë. Car les quarrez des deux lignes F2, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 2, ſont égaux au quarré de F1; les quarrez de F3, & de la perpendiculaire ſur 3 en l'air ſont égaux au même quarré F1, & ainſi des autres. Mais le quarré F1 eſt égal au rectangle EFD, le quarré F2 eſt égal au rectangle EF 10, le quarré F3 au rectangle EF 11, & ainſi des autres quarrez & rectangles, partant tous les rectangles EFD, EF 10, EF 11, & les autres, ſont entre-eux comme les quarrez F1, F2, F3, &c. & partant tous les rectangles EF 10, EF 11, & autres tous enſemble ſont au grand rectangle EFD, comme tous les quarrez F2, F3, &c. ſont au grand quarré F1. Quand du rectangle EFD j'ôte le rectangle EF 10, il reſte le rectangle EF par 10 D qui eſt égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air; quand du même rectangle EFD j'en ôte le rectangle EF 11, il reſte le rectangle EF par 11 D qui eſt égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ai beſoin des quarrez de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troiſiéme figure ſur BC, ces lignes repréſentent les demi-diametres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diametre de la baſe du cylindre.) Mais tous les rectangles ſuſdits ont une même hauteur, ſçavoir FE; & partant ils ſont entr'eux comme les lignes FD, F 10, F 11. Si on ôte de la baſe d'un rectangle la baſe d'un autre rectangle, il reſtera leur différence : comme ſi de

FD j'ôte F 10, il restera D 10; si de FD j'ôte F 11, il restera D 11, & ainsi des autres. Or ces restes sont homologues avec les quarrez des lignes perpendiculaires qui restent quand j'ai ôté le quarré F 2 du quarré F1 : du même quarré F1 j'ai ôté le quarré F3, puis F4, &c. il reste les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D 11, & autres garderont entr'elles la même raison que les quarrez desdites perpendiculaires. Mais les lignes D 10, D 11, D 12, &c. sont sinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. sont perpendiculaires sur le diametre EF; donc les quarrez des perpendiculaires sont au quarré de la grande FI prise autant de fois, comme tous les petits sinus sont au sinus total DF pris autant de fois. Mais les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence; partant le solide fait par la révolution de la figure courbe ACB sur la ligne BC, sera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence.

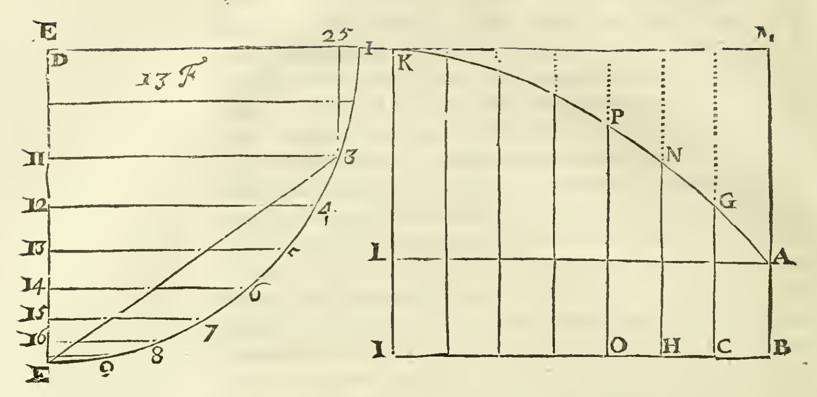
Il faut entendre ici que la figure ABC est faite de toutes les perpendiculaire élevées sur les points 2, 3, 4, &c. & que AB est égale à FI.

Considérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toûjours le point F pour poser ledit compas. Il se trouve que le quarré F4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, est égal au quarré de F3; le quarré F5 avec celui de la perpendiculaire sur le point 5 en l'air, sont égaux au même quarré F3, & ainsi des autres. Or le rectangle EF 11 est égal au quarré F3, & le rectangle EF 12 est égal au quarré F4, & ainsi des autres rectangles & quarrez. Si donc du rectangle EF 11 j'ôte le rectangle EF 12, il reste le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 tirée en l'air. Si du même rectangle EF 11 on ôte le rectangle EF 13, il reste le rectangle EF, par 13 11 qui est égal au quarré de la perpendi-

culaire tirée sur 5, & ainsi des autres. Que si nous feignons une parabole être tirée du sommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris sur son axe 11 F on tire des ordonnées jusques à la circonférence de ladite parabole, les quarrez de telles ordonnées seront égaux aux rectangles ; sçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, sera égal au rectangle fait par le côté droit de ladite parabole qui est FE, & la portion de l'axe 11 12; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, sera égal au rectangle EF par 11 13, & ainsi des autres. Ce qui fait voir que les quarrez des ordonnées sont égaux aux quarrez des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par consequent les ordonnées seront égales ausdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires sont en égale distance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement distantes l'une de l'autre, cela est cause qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui se fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires divisent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne divisent pas l'axe également, mais inégalement ; & ainsi le plan qui se fait des perpendiculaires ne peut pas être comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en sçavoir la raison.

Maintenant il faut considérer la raison des solides, si la figure se tournoit sur la ligne F 5 3 étenduë en ligne droite, supposant que le trait du compas se fasse du point F, & de l'ouverture F3. Or nous avons trouvé par le précedent discours, que le rectangle EF par 11 12 est égal au quarré de la perpendiculaire sur 4 en l'air ; le rectangle EF par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire sur 5 en l'air, & ainsi des autres : partant toutes ces lignes seront homologues avec les quarrez

desdites perpendiculaires. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diametre D1, car il s'en faut la ligne D 11 qu'elles ne viennent jusques à D 1. Que si elles étoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précedente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total D 1 pris autant de fois. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. sont les mêmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur 11 3, & du point 5 & 6 sur la même 11 3, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne 11 D, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne D 1, sçavoir 3 25. Comme donc la ligne 11 3, ou D 25 son égale, à la circonférence F 5 3, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus, sçavoir D 12, D 13, D 14, D 15, D 16 moins autant de fois D 11; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le même espace D 11 pris autant de fois, comme le solide fait par les quarrez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Ceci sera mieux représenté par la petite figure qui est ici. Que IB soit égal à la cirférence F 5 3; AB à D 11 ou à 3 25; & les lignes CG, HN, OP, &c. égales à D 12, D 13, D 14, & autres sinus, desquels il faut retrancher AB ou D 11 pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme ABIL. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est DF en la grande figure, mais en la petite c'est IK qui fait le parallelogramme IKBM duquel il faut ôter le même parallelogramme ABIL; & partant il reste le parallelogramme LAMK, & de IKAB il restera le triligne LAPK; & partant le solide fait par les quar-



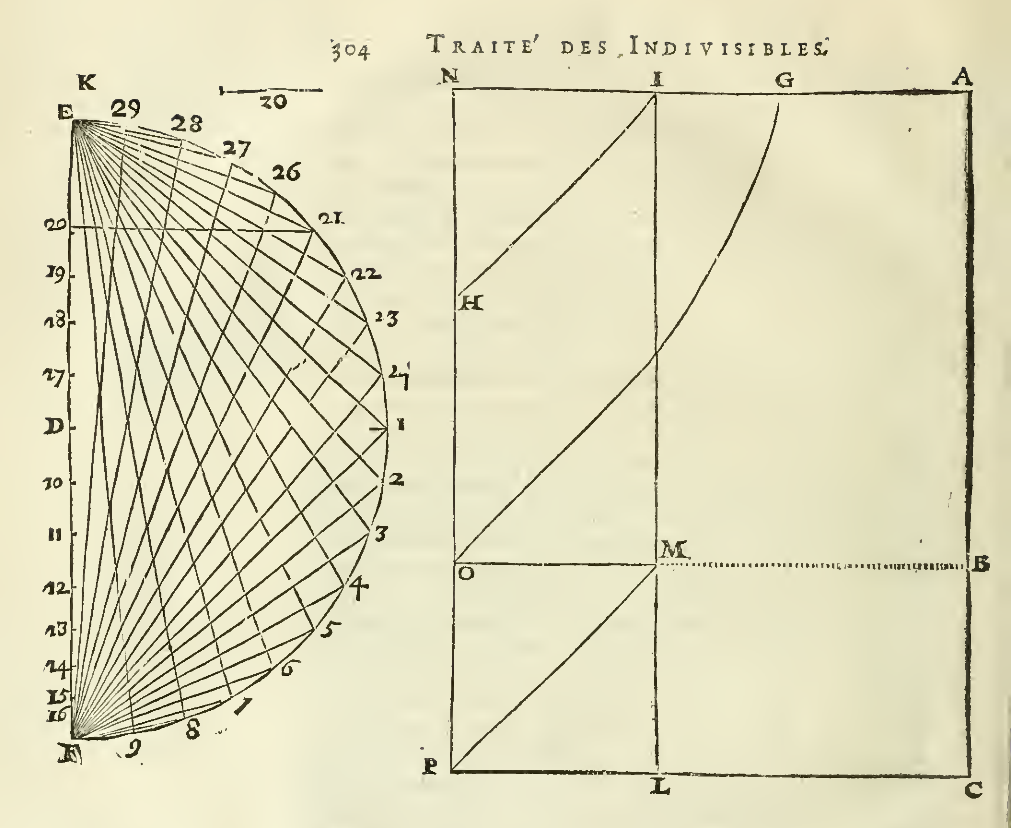
rez des perpendiculaires eſt au cylindre de la grande; comme le triligne LAK au parallelogra mme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raiſons en lignes; & retournant à la grande figure, nous diſons : Comme tous les petits ſinus ſont au grand ſinus pris autant de fois; ainſi le ſinus 11 3 eſt à la circonférence F 3. Or il faut ôter de cette raiſon ce qui y eſt de trop, & dire : Comme tous les petits ſinus moins 11 D pris autant de fois, au ſinus total pris autant de fois, moins le même 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira : Comme le ſinus total DF eſt à D 11, ainſi la circonférence F 5 3, ſera à quelque portion de la même circonférence F 5 3, laquelle portion il faut ôter de la ligne ou ſinus 11 3; & par ainſi la ligne 11 3, quand on en a ôté ce qui avoit été retranché de ladite circonférence F 5 3, eſt à ce qui reſte de ladite circonférence F 5 3, comme le petit ſolide fait des quarrez de perpendiculaires eſt à leur cylindre. Or tous les ſinus & la circonférence me ſont

donnez ; & partant la raiſon des ſolides ſera connuë, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſidérer ſur la même figure la raiſon des ſolides entr'eux quand elle roule ſur la ligne circulaire F2 21 étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas eſt F 21, ſans répeter ce qui a été dit ci-devant : on trouve que les quarrez des perpendiculaire tirées en l'air des points 21, 22, 23, 24, &c. ſont entr'eux comme les lignes 20 19, 20 18, 20 17, &c. Or toutes ces lignes ſe doivent conſidérer en cette ſorte, 20 D — 19 D; 20 D — 18 D; 20 D — 17 D, & ainſi des autres. Les ſuivantes ſe conſidérent ainſi, 20 D + 10 D; 20 D + 11 D; 20 D + 12 D; 20 D + 13 D, &c. enſorte que 20 D eſt pris autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F2 21 & les autres ſinus, ſçavoir D 10, D 11, D 12, D 13 &c. ſont pris autant de fois qu'il y a de diviſions au quart de la circonférence F 5 1. De tout ceci il en faut ôter les lignes D 19, D 18, D 17, & les autres priſes autant de fois qu'il y a de diviſions dans la circonférence 1 21. Voilà une des équations ; l'autre eſt la ligne F 20 priſe autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F 2 21.

Voyez la Figure ſuivante.

Pour mieux entendre ce diſcours, on fera la figure qui eſt ici à côté du demi-cercle, en laquelle AB vaut F 1, quart de la circonférence ; BC vaut 1 21 ; & la toute AC vaut la circonférence F3 21 ; AN vaut F 20, & par ainſi le parallelogramme NC vaut ce qui eſt contenu dans 20 F 2 21 ; NG vaut FD ſinus total ; AG ou ſon égale NI vaut D 20 ; NH égale à OP vaut la circonférence 1 21. Nous diſons donc que comme le rectangle ANPC eſt au rectangle INPL + le triligne NGO — le triligne INH ou OMP ſon égal, ainſi le cylindre eſt au ſolide qui ſe fait quand la figure retran-



chée du cylindre tourne sur la circonférence F 1 21 étenduë en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une considération qui est que prenant toûjours le même point F, & l'ouverture du compas telle que son quarré soit égal aux quarrez de FE & de la ligne 30, il se trouve, par exemple, que les

les quarrez de FE & de 30 ſont égaux aux quarrez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainſi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarrez E 22 & 22 F; partant les quarrez de E 22, 22 F, & de 30 ſont égaux au quarré de 22 F & à celui de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'ôte des deux équations ce qui eſt commun, ſçavoir le quarré F 22, & il me reſte d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainſi tous les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui diviſent la demi-circonférence, ſont égaux aux quarrez des lignes qui partent du point E, & ſe terminent auſdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toûjours, puiſque les quarrez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres ſont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous de ces quarrez je n'ai beſoin que de la moitié; partant cette moitié ſera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette ſomme de quarrez, parce qu'on n'en a pas beſoin d'autre choſe; car joignant leſdits quarrez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarrez des perpendiculaires en l'air, qui eſt ce qu'il faut avoir.)

Nous conclurons donc que le ſolide qui ſe fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent ſur la circonférence étenduë comme une ligne droite, eſt égal à deux cylindres, le premier deſquels a d'une part la ligne FE, & de l'aurre la même circonférence étenduë; & de celui-ci il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la même circonférence étenduë, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la figure tourne ſur la circonférence étenduë; & ainſi le cylindre des perpendiculaires eſt égal à ce petit cylin-

dre & à la moitié du grand tout enſemble; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaiſon des plans, & comment ils ſont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrez de E 22 & de 30 ſont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée ſur le point 22, & le rectangle FE 19 eſt égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 ſur la ligne EF, & ſur quelqu'autre ligne tirée depuis E en K, & ainſi les deux rectangles joints enſemble, ſçavoir FE 19, & FEK, qui valent le rectangle FEK 19 ſont égaux aux quarrez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme auſſi au quarré de la perpendiculaire élevée ſur le point 22. Or ſi du point K comme ſommet je décris une parabole, dont le côté droit ſoit égal à FE, & KF ſoit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 ſera égal au rectangle FE par 19 K, & ainſi de toutes les autres; partant les quarrez deſdites ordonnées ſeront égaux aux quarrez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mêmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'eſt pourquoi le plan occupé par les perpendiculaires devroit être égal au plan occupé par les ordonnées.

Mais la comparaiſon ne ſe peut pas faire de la ſorte, parce que les perpendiculaires ſont également diſtantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le ſont inégalement, puiſque la ligne FE eſt toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut être comparé au plan.

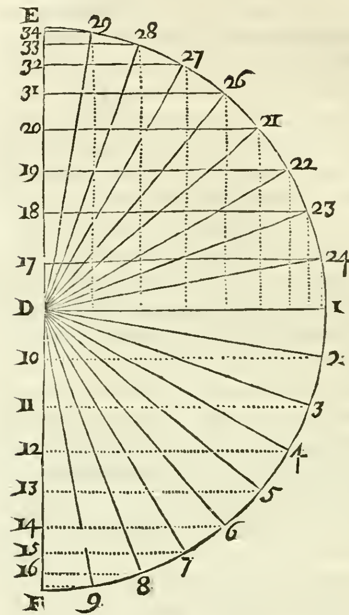
Voyez la Figure ſuivante.

Nous venons maintenant à conſidérer qu'elle eſt la raiſon, ou comparaiſon des quarrez des ſinus avec le quarré du diamétre FE. La circonférence F 1 E eſt diviſée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 ſont toutes ſinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diametre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui eſt

ſinus de complément égal à la ligne tirée du point 24 perpendiculaire ſur le demi-diamétre D 1, & eſt égale au ſinus 29 34. Le même quarré du demi-diametre D 23 eſt égal aux quarrez de 18 23, & de 18 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 23 ſur D 1, & auſſi au ſinus droit 28 33. Le quarré de D 22 eſt égal aux quarrez de 22 19, & de 19 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 22 ſur D 1 & au ſinus 27 32, & ainſi de tous les autres, en telle ſorte que tous les ſinus de complément ſont égaux aux ſinus droits, ci-devant marquez; & ainſi les quarrez de tous les ſinus pris deux fois (ce qui ſe doit faire, puiſque les uns ſont égaux aux autres) ſont égaux au quarré du demi-diametre D 1 pris autant de fois qu'il y a de ſinus. Mais le quarré du demi-diametre n'eſt que le quart du quarré du diametre; partant le quarré du diametre ſera huit fois la ſomme des quarrez des ſinus, c'eſt-à-dire, que les quarrez des ſinus ſont au quarré du diametre pris autant de fois comme 1 à 8. Voilà la premiere partie.

Pour la ſeconde. Le quarré de FE eſt égal aux quarrez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E, qui eſt à dire le quarré 28 33 deux fois; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 32 & 32 E, plus deux fois le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27; le même FE eſt égal aux quarrez F 31 & 31 E, plus deux fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 20 & 20 E, plus deux fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainſi de tous les autres tant en haut qu'en bas: & de cette ſorte le quarré FE vient à être égal à deux fois tous ces petits quarrez F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E, & tous les autres en telle ſorte que le quarré FE pris autant de fois eſt double de tous ces quarrez, & de plus, à deux fois les quarrez de 34 29, 33 28, 32 27, & les

autres. Nous avons vû comme tous les quarrez de ces

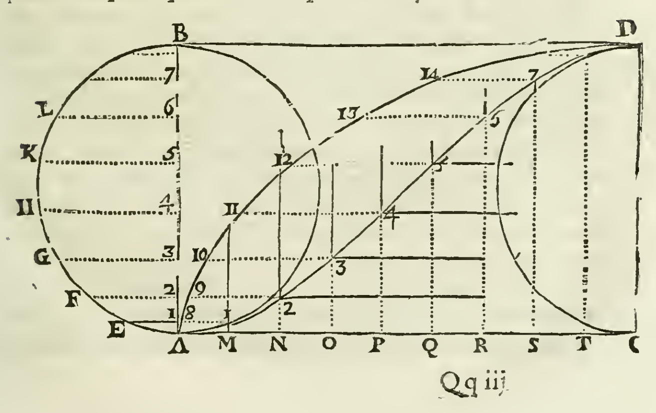


ſinus 34 29, 33 28, &c. ſont au quarré du diametre FE pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils ſont ici deux fois & les ſinus verſes auſſi deux fois; partant deux fois les quarrez des ſinus verſes, & deux fois les quarrez des ſinus droits ſont égaux à huit fois les quarrez des ſinus droits; & ôtant de part & d'autre deux fois les quarrez des ſinus droits, reſtera d'une part deux fois les quarrez des ſinus verſes égaux à ſix fois les quarrez des ſinus droits; & prenant la moitié, les quarrez des ſinus verſes ſeront égaux à trois fois les quarrez des ſinus droits; partant les quarrez des ſinus verſes ſont à ceux des ſinus droits, comme 3 à 1, mais le quarré de FE pris autant de fois eſt aux quarrez des ſinus droits, comme 8 à 1 : donc le quarré de FE pris autant de fois eſt aux quarrez des ſinus verſes, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

La précedente concluſion nous ſervira pour trouver la raiſon du ſolide que fait la Roulette, quand elle tourne ſur la circonférence du cercle générateur étenduë

en ligne droite. Car le ſolide fait par les ſinus verſes (voyez la figure de la Roulette, qui eſt placée ci-après page ſuivante) ſçavoir par M 1, N 2, O 3, P 4, &c. eſt au ſolide fait par le parallelogramme composé du diametre du cercle, & de la circonférence d'icelui étenduë en ligne droite, comme 3 à 8 par la concluſion précedente. Nous ſçavons auſſi que l'eſpace compris entre les deux lignes A 11 D & A 4 D eſt égal au demi-cercle AHB, parce que les lignes d'un des eſpaces ſont égales aux lignes de l'autre eſpaces par la conſtruction : partant le double de l'eſpace eſt égal au cercle entier AHBA, de ſorte que tout ce qui ſe dira du cercle ſe doit entendre dudit eſpace doublé. Mais il a été démontré que le cylindre de AB eſt au ſolide qui ſe fait lorſque la figure A 12 D 5 A tourne ſur la ligne ou circonférence AC, comme 8 à 2, leſquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez ci-devant, font 5, qui eſt la raiſon qu'il y a du ſolide entier de la roulette, à ſon cylindre ABDC doublé ; car ABDC n'eſt que la moitié de l'eſpace parcouru par la Roulette.

Remarquez que ce ſolide qui eſt au cylindre AD tour-

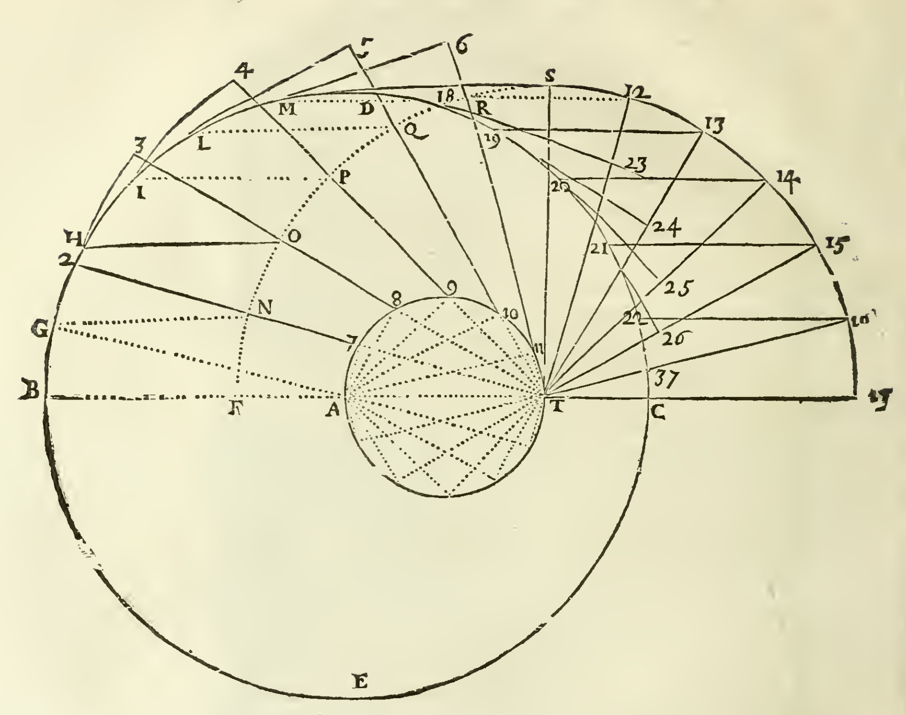


né sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8 : est celui que fait l'espace compris entre les deux lignes A 12 D & A 4 D, qui est égal à celui que feroit le demi-cercle AHB par la même révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en même distances de AC, & partant est le quart dudit cylindre AD; & joignant ledit solide à celui qui se fait par l'espace compris entre les lignes A 4 D & AC, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A 12 D & AC, qui sera 5, ledit cylindre AD étant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique donné, & d'un seul trait de Compas.

LE cercle BDCE est la base d'un cylindre oblique, les côtez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallele au premier BDCE :) ce cercle peut être représenté par le cercle FNOP, &c. mais il est en l'air & à plomb au-dessus de celui-ci) l'axe du même cylindre sort du centre A, va rencontrer obliquement le centre dudit cercle superieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T, & que du sommet de tous les côtez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence même, & le cylindre en cette sorte se

trouve divisé en infinies parallelogrammes ; car les côtez du cylindre avec la portion de la circonférence des deux cercles font des parallelogrammes qui composent tout l'espace du cylindre ; de sorte qu'il faut comparer tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne touchante G 2, & du point correspondant à G, sçavoir de N, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, qui la rencontre au point 2 ; si du sommet du côté du cylindre (j'entens du côté qui commence en G, & va finir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une ligne au point 2 : cette ligne sera perpendiculaire à la ligne G 2. Du point H je tire une ligne touchante, & du point O correspondant à H, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, sçavoir O 3, & ainsi des autres points I & P, L & Q, &c. je ne parle plus de la ligne tirée d'enhaut, car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle sera perpendiculaire à la même touchante. Ayant ainsi tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes à chaque point, ces lignes seront N 2, O 3, P 4, Q 5, &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2N7, 3 O 8, 4 P 9, &c. elles iront toutes finir au point T centre du cercle FS 17. Pour la preuve, nous feignons qu'il y a une ligne AG, laquelle avec 2 7 compose un quadrilatere : en icelui l'angle 7 2 G par la construction est droit ; l'angle A G 2 est droit, sçavoir du centre au point d'atouchement ; partant 2 N, & GA sont paralleles. Soit tirée NT, l'arc GB étant égal à l'arc NF. Il s'ensuit que l'angle GAB est égal à l'angle NTF, puisqu'ils sont faits tous deux aux centres T & A des deux cercles égaux BDC & FS 17, & partant la même GA sera parallele à NT ; donc 2 N 7, & NT sont paralleles entr'elles ; mais elles se joignent au point N, & partant elles ne font ensemble qu'une même ligne.



Maintenant il faut conſiderer les parallelogrammes, au lieu deſquels je prens la perpendiculaire qui tombe du ſommet ſur les touchantes ci-devant, comme du ſommet du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaiſſe la perpendiculaire ſur le point 2, laquelle eſt la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme compoſé de ligne G 2, qui paſſe dans les indiviſibles pour circonférence,

circonférence, & du côté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel côté vaut pour deux côtez du parallelogramme, sçavoir commençant en G & 2, & finissant en la circonférence de la base superieure du cylindre; & par ainsi on a les quatre lignes du parallelogramme, sçavoir G 2 (qui passe pour circonférence) & son égale en la circonférence de la base superieure, & les deux côtez du cylindre. Mais au lieu du parallelogramme nous considerons un triangle qui a pour un de ses côtez la perpendiculaire tirée du sommet du coté sur le point 2, & qui se peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme; & pour les deux autres côtez, la ligne G 2, & le côté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le côté du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du sommet & finissant en 2. Il faut ensuite considerer un autre triangle, dans lequel la même perpendiculaire tombant en 2 soit un des côtez ; 2 N soit un autre côté; & le troisiéme soit la ligne tombante perpendiculairement du sommet du côté sur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe sur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du sommet sur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du sommet sur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence est toûjours égale : mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. sont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P est égale à 9 T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

Au premier triangle G 2 & l'autre point qui est au cercle superieur le côté du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle superieur, vaut la ligne tirée du sommet (qui est ce troisiéme point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G 2. (on doit entendre ceci de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de

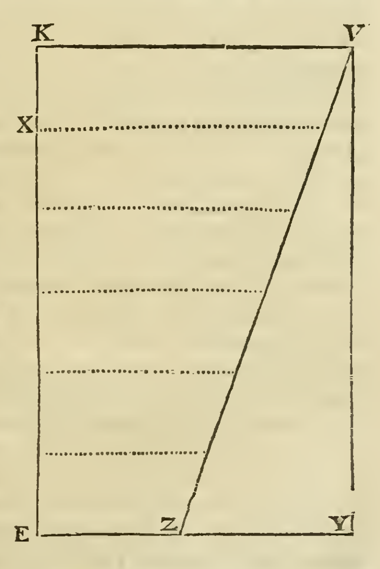
la même ſorte.) Mais les lignes G 2, H 3, I 4 &c. vont toûjours augmentant; car G 2 eſt égal à la ſoutendante A 7, la ligne H 3 à A 8, I 4 à A 9; toutes leſquelles lignes A 7, A 8, A 9 ſont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G 2 eſt égale à A 7, H 3 à A 8, & ainſi des autres; de plus que 2 N eſt égale à 7 T, 3 O à 8 T, &c. Pour cet effet, il faut conſidérer les triangles 2 GN, & AT 7, auſquels l'angle 2 NG eſt égal à l'angle AT 7; car les lignes GN, AT ſont paralleles, l'angle N 2 G eſt droit, par la conſtruction, & pareillement T 7 A qui eſt dans le demi-cercle, & partant le troiſiéme angle eſt égal au troiſiéme; la ligne GN eſt égale à AT, & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne 2 N à 7 T, & G 2 à la ſoutendante A 7; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reſte à voir le rapport & la raiſon de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut conſidérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les côtez égaux, car ils ſont compoſez des côtez du cylindre & de la portion de la circonférence diviſée en parties égales infinies, & cette diviſion eſt faite aux deux cercles ou baſes d'icelui cylindre; & d'autant que les angles ſont inégaux, les parallelogrammes ſont inégaux, & ainſi leur hauteur ſera inégale, c'eſt par cette hauteur qu'il faut conſidérer leſdits parallelogrammes. Il faut voir premierement le plus grand de tous qui eſt fait de BG, tant en la baſe du cylindre BDC, qu'en l'autre qui eſt en l'air, & des côtez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui eſt la hauteur dudit parallelogramme, & qui du ſommet tombe ſur le point B, n'eſt autre choſe que le côté du cylindre; & conſidérant le ſecond parallelogramme qui a pour côtez GH & les côtez du cylindre, on voit que ce côté du cylindre vaut en

puiſſance la ligne G 2, & la perpendiculaire ou hauteur du même parallelogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme eſt plus petite que la perpendiculaire du premier, qui eſt égale au côté du cylindre ; & par ainſi ces hauteurs perpendiculaires ou vont toûjours en diminuant juſques au quart de cercle, & puis aprés vont en croiſſant au quart ſuivant.

Remarquez que les lignes G 2, H 3, I 4, L 5 qui ſont touchantes, paſſent pour la circonférence des diviſions du cercle, & pour côtez des parallelogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que KV eſt égale à la plus grande des perpendiculaires, & auſſi au côte du cylindre, & qui tombe perpendiculairement ſur le côté BG au point B : la ligne KX & les autres diviſions repréſentent & ſont égales à celles de la circonférence, comme KX à BG, & ainſi des autres ; car KE eſt ſuppoſée égale au quart de la circonférence BHD. Le plus grand des parallelogrammes eſt fait des lignes KV, KX ; & quand il eſt pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'eſpace KVYE ; partant toutes ces lignes ſont à la grande KV priſe



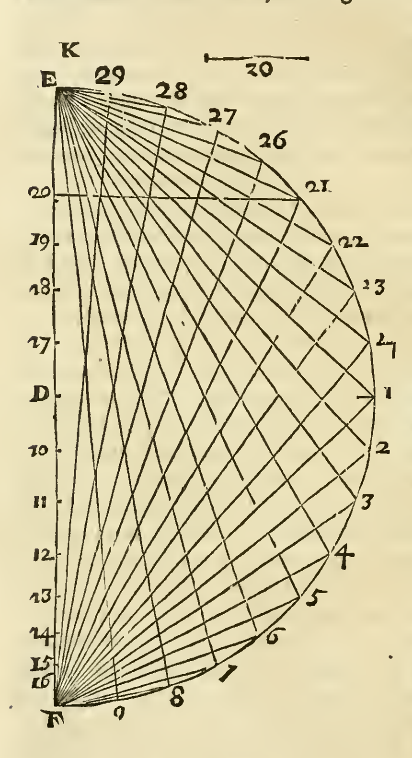
autant de fois, comme la figure KVZE eſt au quart de la ſuperficie du cylindre qui eſt ici repréſenté par le parallelogramme KVYE.

Il faut paſſer plus avant, & conſidérer les perpendiculaires qui ſont tirées du ſommet ſur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle BDC. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement ſur le point N & la ligne N 2; la perpendiculaire qui tombe ſur le point 3 vaut en puiſſance celle qui tombe perpendiculairement ſur O, & la ligne O 3, & ainſi des autres. Ceci s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle BDC baſe du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui eſt la baſe ſupérieure du même cylindre, duquel centre on abaiſſe la perpendiculaire qui tombe ſur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale AT comme diametre je forme le cercle A 9 T; la demi-circonférence duquel eſt diviſée en autant de parties égales qu'il y en a au quart BD de la circonférence du cercle BDC. Puis après, du point duquel j'ai tiré la perpendiculaire ſur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui ſont la diviſion du cercle, comme il a été dit. Du point T je tire des lignes aux mêmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis davantage que le cercle A 9 T nous repréſente la baſe d'un cylindre droit qui a ſon autre baſe en l'air, ſçavoir un cercle dont la circonférence paſſe par le point d'où eſt tiré la ligne qui tombe ſur T, & eſt auſſi le centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, & on nommera ici ledit point qui eſt en l'air, ſommet. Nous diſons donc que la ligne tirée en l'air dudit ſommet ſur le point 7, eſt égale en puiſſance aux deux lignes dont l'une eſt celle

qui tombe perpendiculairement dudit ſommet ſur le point T ; & l'autre eſt T 7. La ligne qui part dudit ſommet, & va au point 8, eſt égale en puiſſance à la ſuſdite qui tombe dudit ſommet ſur T, & à T 8, & ainſi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe ſur le point T eſt toûjours la même, & la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique ; & toutes ces lignes qui partent dudit ſommet, & vont ſur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où ſortent toutes ces lignes, & auſſi celle qui tombe ſur T, eſt le ſommet ; & chacune deſdites lignes qui vont dudit ſommet ſur 7, 8, 9, &c. ſont chacune égales en puiſſance à ladite ligne qui tombe ſur T, & à celle qui de T va ſur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du ſommet aboutiſſoit auſſi.

Or en tout ceci on doit conſidérer la figure du diſcours précedent, qui eſt ici décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas ſe doit faire ſur un cylindre droit poſant un pied du compas pour pole ſur le point F, & traçant de l'autre ſur le cylindre, & faiſant ladite ouverture plus grande que le diametre FE : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires ſuivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. juſques au même point F, auquel lieu la perpendiculaire eſt égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui eſt l'ouverture du compas eſt égale en puiſſance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, ſçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous diſons que la ligne qui eſt l'ouverture du compas vaut les quarrez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point

22 en l'air; partant les quarrez de FE & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarrez F 22 & de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarrez de F 22, & de 22 E; partant les quarrez de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarrez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ôtez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarrez de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le même aux autres



points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par exemple, égal aux quarrez de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarrez desdites

perpendiculaires en l'air ſont égaux aux quarrez de la perpendiculaire ſur E en l'air, & des ſoutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or ſi on ſuppoſe que le cercle A 9 T ſoit auſſi grand que F 22 E de la préſente figure, & qu'ils ſoient tous deux également diviſez, & que l'ouverture du compas vaille en puiſſance le diametre FE, & la hauteur du cylindre oblique, ſçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement ſur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E 29, 28, 27, 26, &c. ſont toutes égales aux lignes qui tombent ſur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui ſont tirées du centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, qui eſt le ſommet d'où tombe perpendiculairement la ligne ſur le point T, & cette ligne eſt la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point ſur le cercle A 9 T, & eſt égale à la perpendiculaire tirée ſur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du même ſommet, eſt égale à la perpendiculaire ſur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainſi toutes les lignes tirées du ſommet, ou centre de la baſe ſupérieure du cylindre oblique ſont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas ſur la ſurface du cylindre droit. Or les lignes ainſi tirées du centre oblique ſur le cercle A 9 T ſont égales aux lignes qui tombent ſur les points 2, 3, 4, &c. & qui ſont tirées de la circonférence de ladite baſe ſupérieure du cylindre oblique, ſçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les ſoutendantes T 7, T 8, T 9, &c. ſont égales au lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous diſons donc que les parallelogrammes qui ſont en même hauteur, & dont les baſes ſont égales, doivent être égaux, & contiennent des eſpaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous de-

Voyez la Figure de la page 312.

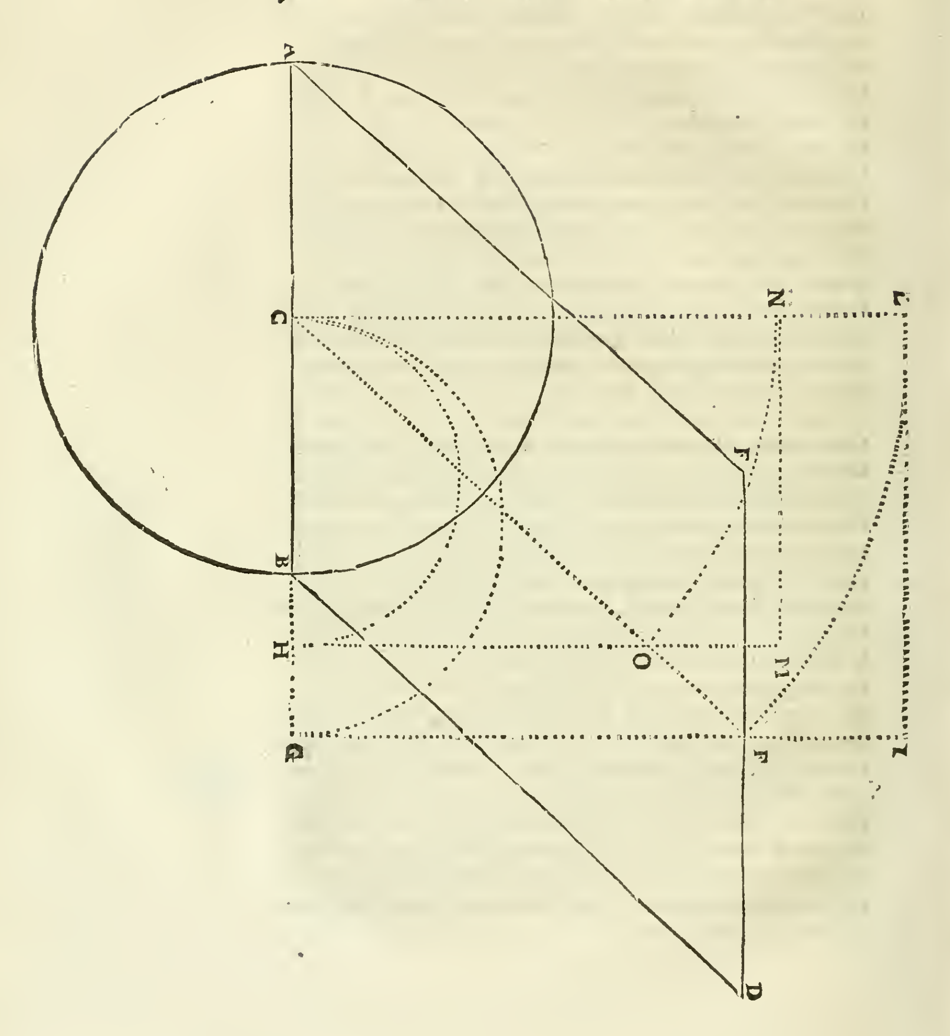
vons feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle FPS 17, & que son diametre AT est égal à BA demi-diametre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T sera égal au quart de cercle BD. Or le trait du compas qui s'est fait en la derniere figure F 22 E, se rapporte entiérement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la derniere figure F 22 E est égal à celui de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air) quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraye hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & même sur C: toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égal à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

Voyez la Figure suivante.

Que la ligne C G soit le diametre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; A C B soit le diametre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; C F soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne F G perpendiculaire sur AB, ladite FG sera la hauteur du cylindre

cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diametre de sa base ; & si on tire de L en I une parallele à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervale CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons vû ci-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diametre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diametre du cylindre droit est égal au demi-diametre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'étant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est necessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH : du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF : ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit ; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé ; car le retranché LF du cylindre droit CLIG est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre CG au demi-diametre CB. Mais le petit cylindre CNMH étant semblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre : les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamétres ;

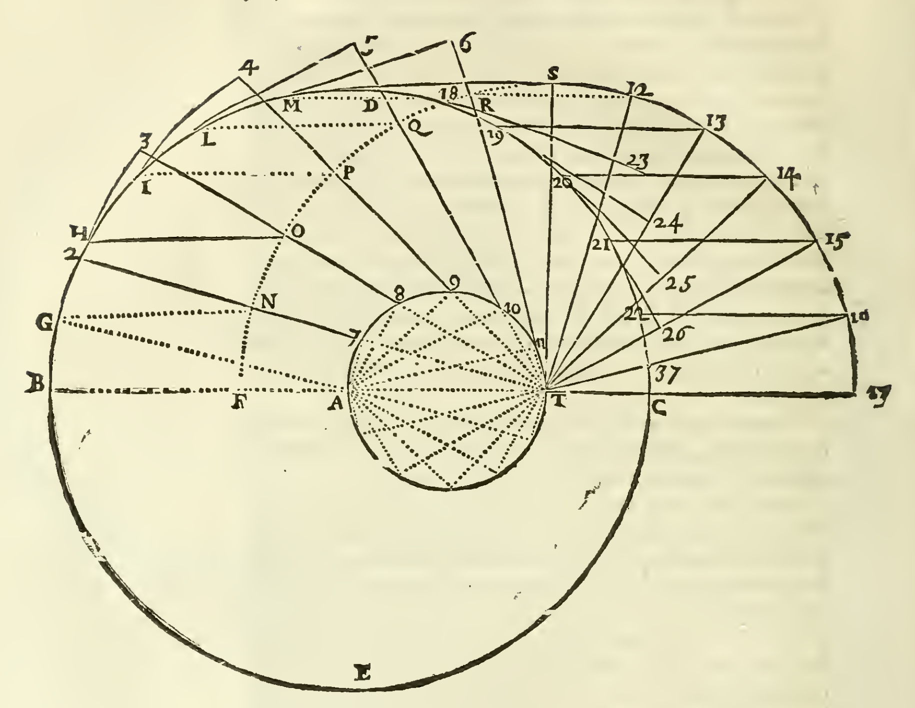

A
G
B
H
G
N
L
F
O
M
F
Y
D

partant la ſuperficie du grand cylindre eſt à celle du petit en raiſon doublée de CG diametre du cercle du grand cylindre à CH diametre du cercle du petit ; la ſuperficie de l'un ſera donc à celle de l'autre en raiſon doublée de CG à CH, c'eſt-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits étant ſemblables, le retranché de l'un ſera au retranché de l'autre, comme toute la ſuperficie de l'un à toute la ſuperficie de l'autre; partant le tranché du cylindre droit CLF eſt au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit eſt à la ſuperficie du cylindre oblique, comme CG à CB; partant le retranché du petit cylindre eſt égal à la ſuperficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a même raiſon au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a été dit ci-devant pour couper ſur un cylindre un eſpace égal à la ſuperficie d'un cylindre oblique, ſe peut réduire à ce qui s'enſuit.

Soit fait la figure ſuivante dans laquelle le diametre du petit cercle, ſçavoir AT, doit être égal au demi-diametre du grand cercle BDC baſe inférieure, & de FPS 17 repréſentant la baſe ſupérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre eſt perpendiculaire ſur T joint au point C. Je dis que ſi on ouvre le compas autant que le côté du cylindre oblique, & que laiſſant un des pieds du compas ſur le point F joint au point A, on trace une ligne ſur le cylindre droit dont la baſe eſt A 9 T, l'eſpace compris entre ladite ligne, & ladite baſe A 9 T, ſera égal à la ſuperficie du cylindre oblique.

Soient diviſées les baſes deſdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, ſçavoir, faiſant autant de diviſions ſur le quart de cercle BLD que ſur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux baſes ſupérieures qu'aux inférieures deſdits cylindres; & tirant des lignes



par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cilindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puiſque les parallelogrammes ſuſdits ont même baſe, puiſqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la baſe de chacun des cylindres, reſte à montrer que leur hauteur eſt égale. Cette hauteur eſt facile à connoître au cylindre droit. puiſque le côté même du cylindre coupé par le compas, la dénote: mais au cylindre oblique cette hauteur eſt la ligne tirée de la baſe ſupérieure repréſentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement ſur la tangente tirée du point correſpondant en la baſe inférieure; ainſi la ligne tirée de N en l'air ſur la touchante G 2 (qui part du point G de la baſe inférieure correſpondant au point N de la ſupérieure) enſorte qu'il ſe faſſe un angle droit au point 2, eſt la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N en l'air de la baſe ſupérieure. Et de même, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui eſt au-deſſus de O en l'air en la baſe ſupérieure, eſt la ligne tirée du même point O en l'air au point 3 ſur la touchante H 3 où elles font enſemble un angle droit; & ainſi les hauteurs de tous les parallelogrammes ſont les lignes tirées des points de la baſe ſupérieure perpendiculairement ſur les tangentes qui partent des points correſpondans en la baſe inférieure; & ainſi, le moindre de tous les parallelogrammes ſera celui qui du point D de la baſe inférieure, eſt tiré au point correſpondant à S en la ſupérieure; car il n'a pour hauteur ſimplement que la hauteur du cylindre oblique, ſçavoir les tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la baſe ſupérieure. Comme le plus grand deſdits parallelogrammes eſt celui qui de B eſt tiré vers F en l'air; car ſa hauteur eſt le côté entier du cylindre oblique: il reſte à démontrer que ces perpendiculaires ſont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premierement, il eſt certain que l'ouverture du com-

pas, qui fait le retranchement ſur le cylindre droit, étant égale au côté du cylindre oblique, la perpendiculaire ſur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, ſera égale à celle qui va du point B au point correſpondant de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, qui eſt auſſi le côté du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire ſur le point T au cylindre droit eſt égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à ſa baſe ſupérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la baſe inférieure va à celui de la ſupérieure qui eſt au-deſſus de T, eſt égal au côté du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas : mais ledit point T en l'air, centre de la baſe ſupérieure, eſt le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire ſur T au cylindre droit, ſera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire ſur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des côtez ſoit DS; le ſecond, la perpendiculaire qui va de S à la baſe ſupérieure; & le troiſiéme qui va de D audit point ſur S en l'air; car ce triangle eſt entiérement égal à celui qui ſe fait au-dedans du cylindre droit dont un des côtez eſt AT; l'autre, la perpendiculaire ſur T juſques au retranchement; & le troiſiéme eſt l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & eſt égale au côté du cylindre oblique, ſçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air: la ligne AT eſt égal à DS, comme il eſt aiſé de le montrer; les angles en T & en S ſont droits; & partant les triangles ſont égaux, & la ligne ſur T égale à la ligne ſur S.

On montrera, comme ci-devant, l'égalité des autres perpendiculaires; ſçavoir, celle ſur 7 au cylindre droit,

à celle qui tombe ſur 2 à l'oblique; celle ſur 8, à celle ſur 3, &c. & nous le répeterons encore ici. L'ouverture du compas eſt égale en puiſſance aux quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T du cylindre droit; & pareillement elle eſt égale aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7, & aux quarrez de A 8 & de la perpendiculaire ſur 8, &c. Donc les quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T ſont égaux aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7; & ſi au lieu du quarré AT on prend les quarrez de A 7 & 7 T qui lui ſont égaux, on aura les quarrez de 7 T, 7 A, & de la perpendiculaire ſur T égaux aux quarrez de 7 A, & de la perpendiculaire ſur 7; & ôtant de part & d'autre le quarré 7 A, on aura le quarré de la perpendiculaire ſur 7 égal aux quarrez de 7 T, & de la perpendiculaire ſur T.

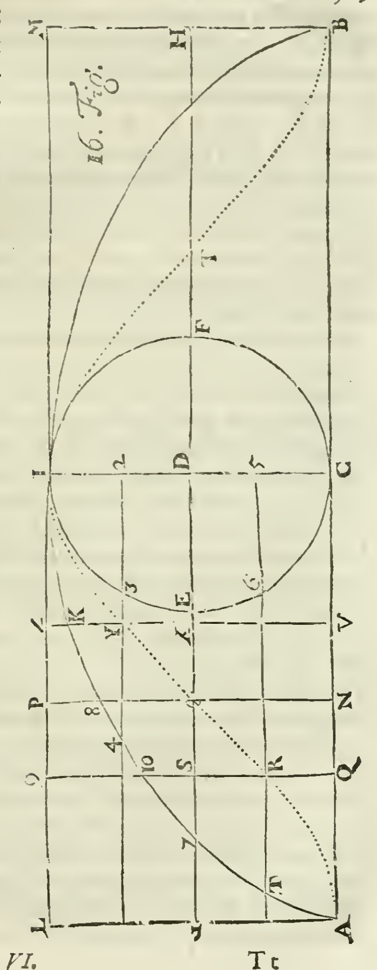
De plus, on a montré que 2 N eſt égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire ſur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air ſur le point N dont un des côtez ſera N 2; le ſecond, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correſpondant en la baſe ſupérieure du cylindre oblique; & le troiſiéme eſt la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air eſt menée au point 2, & ce troiſiéme côté étant oppoſé à l'angle droit en N, vaut en puiſſance les quarrez de la perpendiculaire ſur N (égal à celui de la perpendiculaire ſur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T; donc la perpendiculaire ſur 7 ſera égal à la ligne qui du point N en l'air tombe ſur 2. Mais ces lignes déſignent la hauteur des parallelogrammes faits ſur les cylindres, & partant leſdits parallelogrammes ayant la baſe égale & la hauteur égale ſont égaux; & partant la ſurface du cylindre oblique égale à ce qui eſt coupé du cylindre droit. Mais ſi la perpendiculaire

tirée du centre de la baſe ſupérieure ne tombe pas ſur la circonférence de la baſe inférieure, enſorte que AT ne ſoit pas égal au demi-diametre de ladite baſe, alors il faut proportionner, comme on a montré au diſcours ſur la page 322.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

QUE AIB ſoit le chemin de la Roulette; ALMB le parallogramme fait du diamétre IC, & de la circonférence AB étenduë en ligne droite. Nous cherchons la raiſon qu'il y a du cylindre fait par le parallelogramme, au ſolide fait par la Roulette AIB, lorſque le tout tourne ſur ladite circonférence ACB. Pour cet effet, je tire la ligne GDH parallele à ACB; & cette ligne ſe prend pour le chemin du point D centre de la Roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI 4 & le demi-cercle CEI, chacune en deux parties ſemblables: or il y a un Théoréme qui porte que, quand deux figures ſont ainſi coupées par une ligne parallele à la ligne ſur laquelle les figures font leur tour, les ſolides des figures ſont entr'eux comme les figures; & partant le ſolide fait par la figure AOI 4 eſt égal au ſolide fait par la demi-circonférence IEC; car nous avons vû comme le plan AOI 4 eſt égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé être le quart du parallelogramme; ainſi ces ſolides ſeront chacun le quart du cylindre fait par le parallelogramme. Mais ne prenant que le ſeul ſolide fait par AOI 4 qui ſera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne QRS qui repréſente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB ſur GDH, & la ligne VXY qui repréſente toutes les lignes tirées de NC ſecond quart, ſur la ligne courbe OYI: nous diſons que le quarré de QR eſt égal aux

aux quarrez de QS & SR, moins deux fois le rectangle Q-SR, & ainsi des autres lignes tirées sur ledit quart AN; & de plus que le quarré de VY est égal aux quarrez de VX, & XY plus deux fois le rectangle VXY, & ainsi des autres lignes tirées sur le second quart NC. Or les rectangles qui se trouvent dans l'espace AO sont égaux à ceux de l'espace NI; & étant de plus d'un côté & moins de l'autre, on les ôtera de part & d'autre. Il restera donc que les quarrez de QR, VY & des autres lignes tirées de AC sur la ligne courbe AROYI pris tous ensemble, seront égaux aux quarrez du demi-diametre QS ou VX pris autant de fois, & aux quarrez de SR, XY, & autres lignes tirées de GD sur la ligne



courbe AOI pris auſſi autant de fois. Or leſdites lignes SR, XY, &c. ſont des ſinus droits dont les quarrez ſont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrez du demi-diametre ſont aux quarrez du diametre, comme 2 à 8. Si on joint ces raiſons, on aura celle de 3 à 8 qui eſt celle des quarrez des lignes tirées de AC ſur la ligne courbe AOI au quarré du diametre pris autant de fois; & ſi on y joint la raiſon de la figure AOI 4 au parallelogramme AI, qui eſt comme 2 à 8, on aura la raiſon de 5 à 8, qui eſt celle du ſolide que fait la Roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant ſur ACB.

On conclura la même choſe en conſidérant les quarrez des ſinus verſes QR, VY, & les autres, leſquels ſont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'eſpace ARI 4 eſt au parallelogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raiſon de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle eſt la raiſon du ſolide de la Roulette au cylindre, comme en l'autre concluſion.

Maintenant il faut voir quelle raiſon il y aura entre le ſolide de la même Roulette & ſon cylindre, lorſqu'elle tourne ſur LM parallele à AB, où il faut conſidérer que le quarré de N 8 vaut les quarrez de NP & P 8 moins deux fois le rectangle NP 8; & ainſi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle NP 8 eſt égal aux quarrez NP, P 8. On ſçait que les quarrez de N 8, VK, & de toutes les autres ſont au quarré du diamétre CI ou NP ſon égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP 8, VZK, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils ſeront entr'eux comme toutes les lignes P 8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'eſpace rempli de ces lignes, ou plûtôt toutes ces lignes ſont au diametre pris autant de fois, comme 2 à 8: & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils ſeront au quarré du dia-

metre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8 ; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 ci-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q 9, N P, VZ, &c. représentent les 8, il s'ensuivra que les quarrez 9 10, P 8, ZK, &c. vaudront $\frac{1}{8}$; car puisque les quarrez Q 10, N 8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, NP 8, VZK, &c. (qui tous ensemble avec lesdits quarrez vallent $\frac{9}{8}$) sont égaux aux quarrez Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, &c. ceux-ci vallent aussi $\frac{9}{8}$. Si donc on en ôte les quarrez Q 9, NP, VZ, qui vallent $\frac{8}{8}$, restera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P 8, ZK, qui ôtez encore des mêmes quarrez Q 9, NP, VZ, restera $\frac{7}{8}$ pour le solide de la Roulette, qui sera au cylindre comme 7 à 8.

La même chose se peut conclure d'une autre façon, en disant que le quarré P 8 est égal aux deux quarrez PN, N 8 moins deux fois le rectangle PN 8, & tous les autres de même, sçavoir le quarré de ZK égal aux quarrez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainsi des autres. On a vû que les quarrez de N 8 & les autres, sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 5 à 8 ; & joignant le quarré de NP qui est 8, avec 5, on aura la raison de 13 à 8. De cette somme il faut ôter le moins, sçavoir les rectangles PN 8 & autres, tous lesquels ont même hauteur, sçavoir PN ; ils seront donc entr'eux comme leurs bases VK, N 8, Q 10, & les autres. L'espace A 8 I D C rempli par les petites lignes VK, N 8, &c. est au grand parallelogramme AI, comme 6 à 8 ; & le rectangle pris deux fois sera audit parallelogramme, comme 12 à 8 ; & ôtant la raison de 12 à 8 de celle de 13 à 8, restera celle de 1 à 8, comme ci-devant pour la valeur des quarrez ZK, P 8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant considérer les solides qui se font

quand la figure tourne sur LA, où on remarquera que la ligne IC parallele à ladite LA, coupe le parallelogramme AM & la figure AIB en deux également; & partant les solides sont entr'eux comme les plans; & ainsi le solide fait par AIB sera au cylindre formé par le parallelogramme AM, comme le plan de l'un est au plan de l'autre. Mais les plans sont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre sera au solide de la Roulette comme 4 à 3.

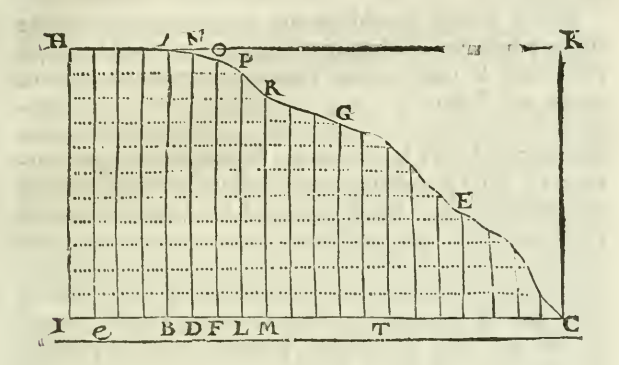
Considérons maintenant le solide fait par le plan de la compagne de la Roulette AOITB. On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallelogramme AM, que ladite figure AOITB; partant les solides seront entr'eux comme les plans: mais les plans sont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre sera au solide fait par AOITB, comme 2 à 1, c'est-à-dire double.

On conclura de là que le solide fait par la figure AOI 10 est au cylindre AI, comme 1 à 4; car puisque le solide fait par A 8 I DC est au cylindre AI comme 3 à 4: si on en ôte le solide fait par AOIDC qui est au même cylindre AI comme 2 à 4, restera la raison de 1 à 4, pour celle du solide fait par AOI 10, au même cylindre AI.

PROPORTION DES SOLIDES composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura même base & même hauteur, ensemble de leur centre de gravité.

QUE AGEC soit une ligne irrégulieres telle qu'on voudra, pourvû toutefois qu'elle baisse toûjours vers C; & soient tirées les lignes AB, BC, qui fassent un angle en B, lequel soit ici supposé être droit, car cela

n'eſt pas neceſſaire, & on aura le triligne ABC. Que les lignes AB, BC ſoient diviſées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB ſoit égal à chaque partie de BC : de chaque point de la diviſion ſoient ti-



rées des paralleles aux lignes AB, BC, qui diviſent le triligne, comme on voit ici. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC ; puis je conçois un plan ſur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extrémité de la perpendiculaire ſur C en l'air. Enſuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires eſt égale à ſa correſpondante, ſçavoir à celle qui va du point dont elle a été tirée juſques à la ligne AB : comme la perpendiculaire tirée ſur D ſera égale à BD, celle qui eſt élevée ſur F eſt égale à BF, & ainſi des autres. Il faut auſſi concevoir un triangle rectangle iſocelle qui ſe fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air ſur C qui eſt égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extrémité de ladite per-

pendiculaire : le plan de ce triangle eſt égal à la moitié du quarré BC ; le même doit être entendu de tous les triangle qui ſe font par le moyen du plan incliné, qui tous ſont égaux à la moitié du quarré de leurs côtez égaux.

Il faut enſuite conſidérer une perpendiculaire élevée ſur le point A qui chemine ſur la ligne AGEC, & qui rencontre le plan incliné : cette ligne par ſon chemin décrit une ſuperficie ; & par conſéquent on a quatre ſuperficies qui enferment un ſolide, la premiere eſt le plan du triligne ACB ; la deuxiéme, le plan incliné qui commence à AB ; la troiſiéme eſt le triangle ſur BC en l'air & perpendiculaire ſur le plan A B C ; la quatriéme eſt celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGEC. Ce ſolide eſt diſtingué & comme compoſé d'une infinité de triangles tous paralleles & ſemblables à celui qui eſt élevé perpendiculairement ſur BC, & qui eſt une des faces du ſolide ; partant ce ſolide partagé de cette ſorte eſt formé de la moitié de tous les quarrez de la ligne BC, & de ſes paralleles.

Que ſi on veut couper ce ſolide d'un autre ſens, ſçavoir par des plans paralleles à la ligne AB, alors on fera dans le ſolide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes enſemble feront égaux aux demi-quarrez de la ligne BC & de ſes paralleles ; car c'eſt le même ſolide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne BC & de ſes paralleles, ſont égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

Soit tiré une parallele à A B en quelque part qu'on voudra : que ce ſoit HI, ſçavoir hors de la figure, & ſoit achevé le parallelogramme HICK, & ſoit élevé un plan ſur la ligne HI, incliné en telle ſorte ; qu'il ren-

contre comme le précedent, l'extrémité de la perpendiculaire ſur C en l'air priſe de la longueur de IC; & ſoit auſſi prolongé les lignes de la figure juſques à la ligne HI : on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutiſſent à HI ſont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC, en les prolongeant juſques à HI, & dans l'eſpace HIBA, ſçavoir ABI, NDI, OFI, &c.

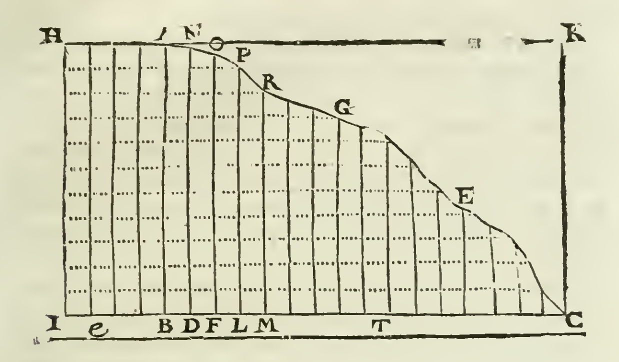
Nous conſidérerons maintenant la figure quand elle tourne ſur HI. Alors elle forme trois ſolides, ſçavoir un cylindre par HIBA; un ſolide qui ſe nomme creux par la figure ACB; un autre par HACBI; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raiſons de ces ſolides entr'eux. Pour le petit cylindre, il eſt au grand cylindre comme le quarré de HA eſt au quarré de HK; le ſolide fait de HIBCA eſt au grand cylindre, comme le quarré de IC & des autres paralleles juſques à HA, ſont au quarré de HK pris autant de fois; le ſolide de la figure ABC eſt au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB, pris autant de fois, eſt au quarré HK pris autant de fois : & ſi on prend la moitié du ſolide, elle ſera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez IC, & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois, eſt au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur eſt égal, ſçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI, & ils feront au grand quarré HK pris autant de fois, comme la moitié du ſolide de la figure eſt au grand cylindre. Que ſi on fait tourner la figure ABC ſur AB, alors la moitié du ſolide fait par ABC ſera au cylindre fait par ABCK, comme la moitié des quarrez de BC & de ſes paralleles, ſont au quarré de BC pris autant de fois; & en general, ſur quelque ligne qu'on faſſe

tourner la figure, pourvû qu'elle soit parallele à AB, on aura toûjours la même équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la même ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cet effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appui & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'iceux pese; & tous ces centres ensemble viennent à être égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisiéme &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des côtez de leurs figures; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécedens est à celui des conséquens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB : ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne

BC

BC où les parties ſont contrepeſées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il eſt en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres ci-deſſus repréſentées par toutes les lignes qui ſont ſur les points. Ce poids



eſt donc une ligne égale à toutes les lignes ci-deſſus, & je dis ainſi : Toutes les peſanteurs, ou centres de gravité enſemble ſont au poids de toute la figure qui eſt en M, comme tous les parallelogrammes de la figure ſont au grand parallelogramme qui a un côté égal à toutes les lignes ci-deſſus, & la ligne BM pour l'autre côté (car on prend ici les parallelogrammes qui étant perpendiculaires ſur les lignes ND, OF, PL, &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point ſur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a été dit ci-devant.) Mais toutes les peſanteurs aſſemblées ſont égales à la peſanteur qui eſt en M; partant tous les parallelogrammes de la figure ſont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ſes côtez, & BM

pour l'autre : étant égaux ils auront même raiſon à une autre grandeur ; c'eſt pourquoi tous les rectangles ſont au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes ſuſdites AB, ND, OF, &c. pour un de ſes côtez, & BM, pour l'autre, eſt au même quarré pris comme ci-devant.

Au lieu de tous les rectangles ſuſdits je prens ce qui leur eſt égal, ſçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils ſeront donc au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle ſuſdit qui a BM pour un de ſes côtez, & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. eſt audit quarré BC pris &c. Mais nous avons vû que comme le cylindre fait par ABCK eſt à la moitié du ſolide fait quand la figure tourne ſur AB, ainſi le quarré BC pris autant de fois, eſt aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ſes côtez, & BM pour l'autre, eſt au quarré BC pris autant de fois, comme la moitié du ſolide fait par ABC eſt au cylindre. Par les indiviſibles je fais des ſolides de tous ces plans, & je dis que la moitié du ſolide fait par ABC eſt au cylindre fait par ABCK, comme le ſolide qui a pour baſe la figure ABC, & BM pour hauteur, eſt au ſolide qui a pour baſe le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les ſolides ſont entr'eux en raiſon compoſée de leur baſe & de leur hauteur ; partant la moitié du ſolide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, ſont la raiſon compoſante des deux ſolides, qui ſont enrr'eux en la raiſon compoſée du parallelogramme ABCK à la figure ABC, & de celle de la ligne BC, à BM. Nous connoiſſons la raiſon compoſante, c'eſt-à-dire de la moitié du ſolide au cylindre ; car (ſi c'eſt une parabole) ſon ſolide eſt à ſon cylindre comme 8 à 15 : ici nous n'avons que la moitié du ſoli-

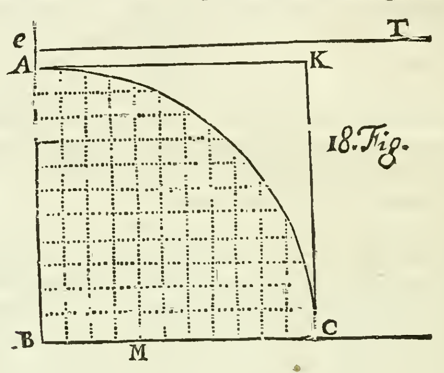
de; c'eſt pourquoi ce ſera comme 4 à 15. Pareillement la raiſon du plan de la parabole à ſon parallelogramme eſt connuë, qui eſt comme 2 à 3, ôtant donc de 4 à 15 la raiſon de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reſte celle de 6 à 15; & telle eſt la raiſon de BM à BC, & le point M eſt le centre.

Que ſi nous feignons un cylindre tel qu'il ſoit la moitié d'un ſolide, & que nous diſions : Comme le cylindre eſt à la moitié du ſolide, ainſi quelque ligne, comme *e* T eſt à ligne B M ; & comme le parallogramme ABCK eſt au plan ABC, ainſi la même ligne *e* T eſt à la ligne BC : ces trois lignes compoſent la raiſon qui eſt entre la moitié du ſolide & le cylindre, qui ſera la raiſon compoſée de *e* T à BC, & de BC à BM; & ainſi le point M ſera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder ſelon cette derniere façon il faut avoir trouvé cette ligne *e* T, faiſant que, comme le plan ABC eſt au parallelogramme ABCK, ainſi la ligne BC ſoit à *e* T; & puis dire : Comme le cylindre fait par ABCK eſt à la moitié du ſolide fait par ABC tournant ſur AB, ainſi la ligne *e* T ſoit à B M : le point M marque le centre de gravité. Cette méthode eſt pour agir plus élegamment, & plus briévement que par la premiere qui eſt plus sûre, ſçavoir par la compoſition de raiſon des deux ſolides qui ſont entr'eux en la raiſon compoſée de celle de leur baſe, & de celle de leur hauteur, comme il a été dit ci-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le ſolide qui ſe fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendroit en C, puis après du point C l'autre quart de cercle viendroit rencontrer la ligne AB prolongée tant que de beſoin. Quand ce quart de cercle tourne ſur A B, il ſe fait un ſolide de ce quart, & il ſe fait un cylindre du *Voyez la Figure ſuivante.*

parallelogramme ABCK, lequel, en cette figure, eſt un quarré; car AB eſt égale à BC, & chacune eſt le demi-diametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité, ſçavoir, le point M, en la façon ordinaire, ſçavoir, que le demi-ſolide du quart de cercle, eſt à ſon cylindre comme le ſolide qui a pour baſe le quart de cercle, & pour hauteur la ligne BM, eſt



au ſolide qui eſt compoſé du quarré BC pris autant de fois qu'il y a de diviſions en BC. Mais les ſolides ſont entr'eux en la raiſon compoſée de celle de leur hauteur, & de celle de leur baſe, ſçavoir comme le quart de cercle, au quarré BC, & comme la ligne BM, à BC; en telle ſorte que ces quatre termes compoſent la raiſon de la moitié du ſolide fait par le quart de cercle, à ſon cylindre, laquelle eſt connuë; car le cylindre eſt au ſolide comme 6 à 4; mais ici il n'y a que la moitié, & partant la raiſon ſera comme 6 à 2. La raiſon du plan au plan, & de la ligne à la ligne, ſera donc comme 2 à 6; la raiſon du plan au plan eſt connuë; car en cette figure, ſelon Archiméde, elle eſt comme 11 à 14. Si

donc je souftrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à être le lieu du centre de gravité, en la premiere maniere.

La deuxiéme façon est en disant : Comme le cylindre de ABCK est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne *e*T est à BM; (on trouvera la ligne *e*T comme ci-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallelogramme, ainsi la ligne BC est à *e*T) c'est pourquoi nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde méthode.

La troisiéme méthode est la plus subtile, & elle est telle : comme le quart & demi de la circonférence, sçavoir AC & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à BC demi-diametre, ainsi BC est au tiers de la ligne *e*T trouvée comme ci-dessus; & il se trouvera que BM sera le tiers de ladite *e*T; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que BM est le tiers de *e*T; de plus que le quart, & demi de la circonférence est à son demi-diametre, comme le même demi-diametre est à BM tiers de *e*T.

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, est à la moitié du solide fait par le quart de cercle, ainsi la ligne *e*T soit à BM. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne *e*T sera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diametre & le tiers de *e*T sont proportionnelles. Ceci se démontre par la proportion

troublée que je diſpoſe comme il s'enſuit. Que le quart & demi de la circonférence ſoit *a*; le demi-quart de la même circonférence ſoit *b*; le demi-diametre ſoit *c*; le même demi-diametre ſoit auſſi *d*; la ligne *e*T ſoit *e*; & le tiers de la ligne *e*T ou la ligne BM, ſoit *m*. On fera les proportions ſuivantes.

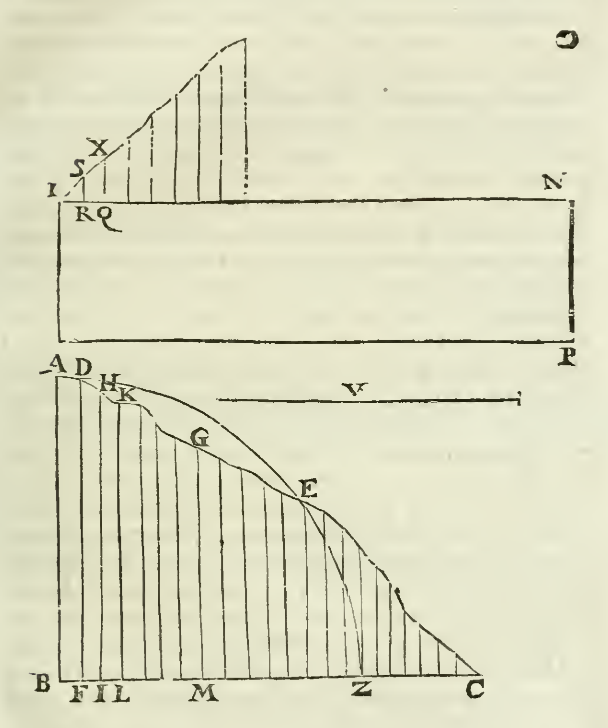
Comme *a* eſt à *b*, ainſi *e* eſt à *m*; & comme *b* eſt à *c*, ainſi *d* eſt à *e*; partant comme *a* eſt à *c*, ainſi *d* eſt à *m*; partant les trois lignes *a*, *c*, *m* ſont proportionnelles, ce qui reſtoit à démontrer.

Tout ce qui a été dit juſques à préſent ne ſert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un ſolide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puiſſe être, ſoit droite, circulaire, ou irréguliere.

TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE' de la ligne AGEC.

SOIT diviſé la ligne AGEC en une infinité de parties égales; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme ci-devant, ſoit auſſi tiré des paralleles à AB de chaque point de la diviſion, qui diviſeront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur penſanteur; & le poids d'une partie n'eſt pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion eſt repréſenté par le point de ſa diviſion : les paralleles portent chaque peſanteur ſur le levier BC aux points de ſa diviſion; & c'eſt ſur ces points de BC que peſent toutes les parties de la ligne AGC. Nous ſçavons que les poids ſont entr'eux comme les rectangles; c'eſt-à-dire que le poids du point D eſt au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou ſon égale DH, & de BI. Au lieu de dire,

comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un côté égal, sçavoir la portion de la ligne AGC. Je feins que le cen-



tre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pesanteur; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM; le poids du point I est au

poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainſi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points peſans ſur ceux de la ligne BC ſont au poids univerſel peſant ſur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une ſeule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. eſt au rectangle fait par la ligne AGC penduë au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramaſſez enſemble ſont égaux au poids en M, qui eſt le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles ſont égaux, & leurs côtez ſont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la réſolution de la queſtion du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'ôte par les indiviſibles la portion de la ligne AGC : cette portion étant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini; (car tout ce qui eſt fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ni ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reſte l'eſpace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui eſt égal au même rectangle de AGC par BM. Je poſe que la ligne AGC ſoit la droite TN, laquelle étant diviſée infiniment, j'éleve ſur chaque point de la diviſion perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainſi des autres. Les lignes ainſi élevées compoſent une figure égale au rectangle TP dont le côté NP eſt égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui ſoit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un eſt égal à l'autre.) Que ſon côté ſoit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne A G C eſt à la ligne V, ainſi la ligne V eſt à la ligne BM cherchée; & ceci eſt la propoſition univerſelle. Comme la ligne propoſée à la ligne dont le quarré eſt égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes BF, BI,

BI, BL, &c. ainſi cette même ligne qui eſt le côté dudit quarré, eſt à la ligne BM cherchée; & ainſi ces trois lignes, ſçavoir la donnée, celle qui eſt le côté du quarré ſuſdit, & la cherchée BM ſont continuellement proportionnelles.

Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AGZ. Alors il faudra dire : Comme la ligne AGZ étenduë en ligne droite eſt à ſon demi-diametre BZ, ainſi ce demi-diametre eſt à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence eſt au demi-diametre, comme tous les ſinus tirez par les points eſquels eſt diviſée la circonférence, ſont au ſinus total pris autant de fois; or tous ces ſinus ſont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence diviſée en parties égales infinies; & tous ces ſinus ſont égaux au quarré du demi-diametre, comme il paroît par la troiſiéme propoſition.

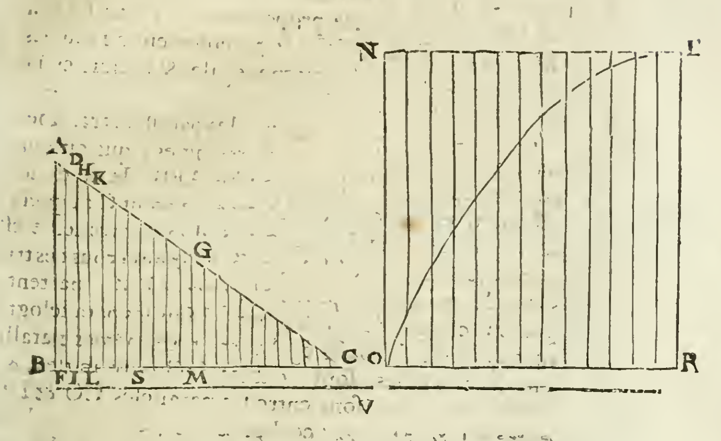
Voyez la Figure ſuivante.

Mais ſi on ſuppoſe que la ligne AC ſoit droite, pour en trouver le centre de gravité je la diviſe en une infinité de parties égales & de chaque point de la diviſion je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent ſur le levier BC & le diviſent en parties égales entr'elles, & diviſent la figure ABC en triangles ſemblables: les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne propoſée AC. Or tous ces centres ou peſanteurs ſont entr'elles, comme les rectangles ſont entr'eux, c'eſt à ſçavoir comme le rectangle BF par AD eſt au rectangle BI par DH ou ſon égale AD; & d'autant que la portion de AC eſt toujours la même en tous les rectangles, les centres ſont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de ſorte que ces petits centres ou peſanteurs particulieres ſont au centre ou peſanteur totale qui eſt au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & peſanteur à la ligne AC) comme

toutes les lignes BF, BI, BL, &c. sont au rectangle AC par BM; car par les indivisibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, sçavoir de AD & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. prises ensemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui soit égale en puissance à l'espace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, sçavoir AC, est à cette ligne dont le quarré est égal à l'espace & plan susdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainsi cette ligne ou côté de quarré est à BM; ensorte que la ligne susdite qui peut l'espace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. soit moyenne proportionnelle entre la ligne proposée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes sont à BC pris autant de fois, comme le triangle au quarré de la somme ou multitude desdits points, c'est-à-dire, comme 1 à 2; partant la ligne BM vaudra en puissance le quart du quarré BC; & partant BM est la moitié de BC; & ainsi le centre de ladite ligne proposée est au milieu d'icelle: car du point M tirant une ligne parallele à AB, elle passera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de son centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure solide, soit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, solide elliptique, ou de quelqu'autre solide connû. Parlons premierement du cône qui est représenté par la ligne AC, & par GB tirée perpendiculairement sur AB. Le sommet du cône est C, l'axe est CB, & la ligne AB étant doublée vient à être le diametre du cercle, ou base du cône. Que l'axe de ce cône, sçavoir BC, soit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales: toutes ces divisions sont autant de cercles, qui tous ensemble par les indivisibles composent le cône, & sont entr'eux

comme les quarrez de leurs diametres; sçachant donc comme les diametres sont entr'eux, on sçaura aussi la proportion des quarrez. Or cette division fait dans le cône & sur son axe des triangles semblables, comme



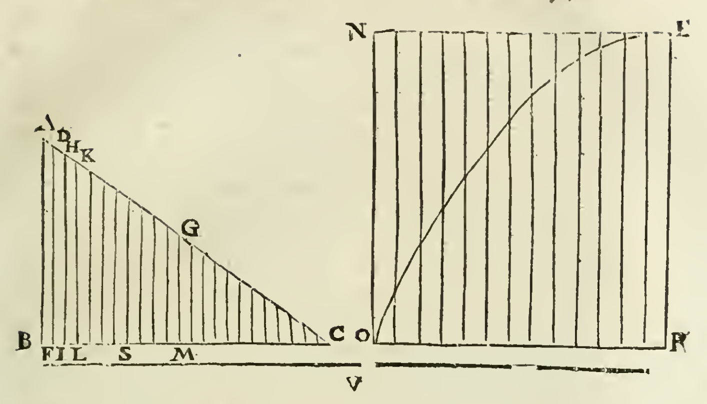
ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'est pourquoi les demi-diametres AB, DF, HI, KL &c. sont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC sont entr'elles: or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diametres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diametres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarrez garderont l'ordre naturel des quarrez desdits nombres; & partant ces cercles seront entr'eux comme les quarrez des nombres qui suivent l'ordre naturel; c'est-à-dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela posé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent

la même proportion, c'est-à-dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au même lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E : son axe est ER ; & la touchante EN représentera l'axe du cône BC. Je divise EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (représentant AB) qui divisent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3 ; on dira donc : Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi NE sera à une autre ligne V; partant V sera triple de NE; & si NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite : Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne OEN qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1 ; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui sera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC étant 4, BS sera 1, & CS sera 3.

CENTRE DE GRAVITÉ du Conoïde parabolique.

SI je cherche le centre de gravité du conoïde parabolique, je le couperai, ou son axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviseront tout le solide en cercles (car dans le conoïde parabolique aussi bien que dans le cône, les sections faites par un plan parallele à la base, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres; & partant sçachant comme les diametres sont entr'eux, nous sçaurons comment sont leurs quarrez. Mais dans la parabole les quarrez des ordonnées sont entr'eux comme les portions de l'axe : ici les portions sont



égales, & partant ils font entr'eux comme les nombres naturels; les quarrez des diametres feront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré étant 1, le fecond fera 2, le troifiéme fera 3 &c.

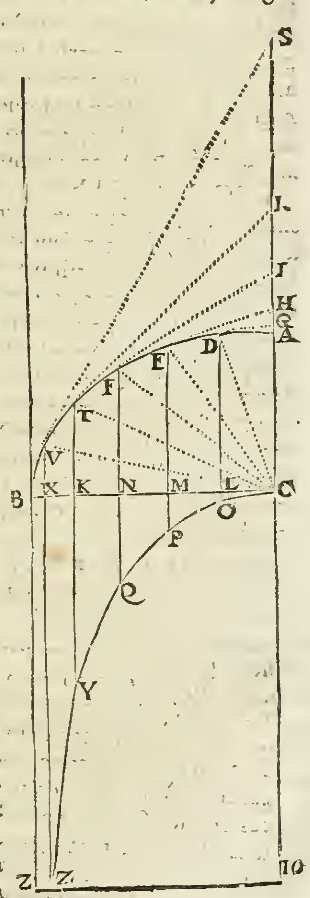
Par noftre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette même proprieté. Je trouve que le triangle fait la même chofe; il faut donc feindre que ABC eft un triangle. Je divife BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB : or BC repréfente l'axe du folide dont on cherche le centre. Cela fait je dis : Comme le plan du triangle eft à fon parallelogramme, ainfi BC eft à la ligne V. On fçait que le triangle eft au parallelogramme comme 1 à 2; partant V fera double de BC; fi BC eft 3, V fera 6. Après on dit : Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle eft à la moitié du folide, ou du cône fait par le triangle, ainfi la ligne V fera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre fufdit eft à la moitié du cône comme 6 à 1; partant BM fera $\frac{1}{6}$ de la ligne V, &

le tiers de BC; le centre de gravité du conoïde parabolique sera donc au tiers de son axe du côté de la base; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du côté de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, après avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide : il faut trouver un plan duquel la proprieté soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles : si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent être entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit être telle dans le plan : observant toûjours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diametre, au quarré du demi-diametre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbe ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chacun desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition que la derniere comme DG étant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S &c. qui partant seront tous plus éloignez de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à être parallele à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallele à CG; du point

E, la ligne EP égale & parallele à HC; de F, la ligne FQ égale & parallele à IC; semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC, & ainsi des autres points infinis, la ligne CS étant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infinie, laquelle viendra à être asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division paralleles à CS, qui est la ligne courbe COPQYZ. Puis après, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe BFA, tout l'espace AFBC viendra à être divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace BFACQZ jusques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en



parallelogrammes infinis, l'un desquels est DOCG qui représente le moindre. C'est un parallelogramme, parce que dans les indivisibles la touchante DG passe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a été dit cidevant dans une autre proposition : or DO a été faite égale & parallele à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correspondantes en CS.

Pour venir à la conclusion, les parallelogrammes ont tous un même côté que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux côtez du triangle, & dont le troisiéme est la portion de la courbe BFA divisée à l'infini; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace AFBC, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallelogrammes qui sont sur bases égales & entre mêmes paralleles que les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les paralleles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes sont entre les mêmes paralleles, & sur des bases égales; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les paralleles à CA passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mêmes paralleles.)

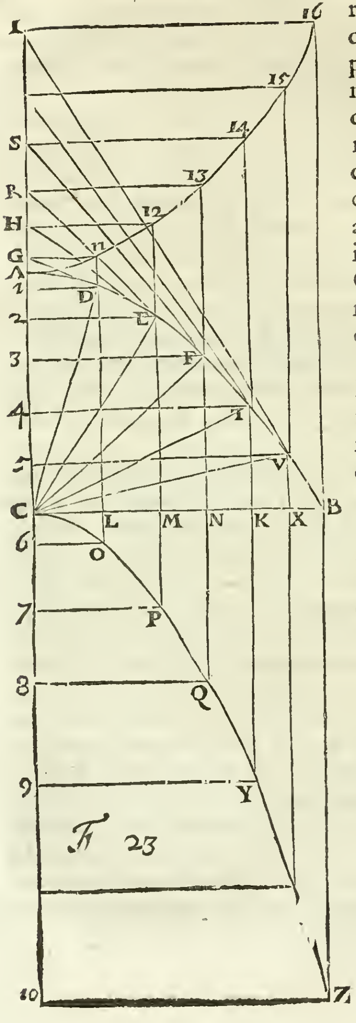
Puisque les parallelogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallelogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, sçavoir le quadriligne ZBFACQZ sera double de l'espace AFBC.

AFBC. Mais l'eſpace AFBC eſt celui qui eſt fait par les triangles ; partant il ſera égal à l'autre eſpace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ étant tirées à l'infini ; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ eſt aſymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG eſt égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la même touchante, & ainſi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui ſort du point B, & qui devroit rencontrer la même ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fût égale à la portion de la ligne CAI prolongée & compriſe entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il eſt impoſſible que la touchante en B la puiſſe rencontrer, puiſqu'elles ſont paralleles ; ainſi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce ſoit, & partant elle eſt aſymptote.

Conſidérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. ſur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. ſur l'axe C 10, ſuppoſant que la figure ABC ſoit une parabole.

Soit D 1 la premiere ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal à GC, & auſſi à 1 6 ; & ſi des deux lignes égales GC, & 1 6 on ôte la ligne C 1 qui leur eſt commune à toutes deux, il reſtera G 1 égale à C 6. Or par la proprieté de la parabole, G 1 eſt diviſée en deux également par le ſommet A ; partant C 6 eſt double de A 1 ; & ainſi de tous les autres, ſçavoir C 7 ſera double de A 2 ; C 8 de A 3, &c. & ainſi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC ſont entr'elles, ainſi les doubles parties ſeront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties ſont entr'elles comme les quarrez des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe ſe-



ront aussi entr'elles ; comme les quarrez des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure CZ 10) sçavoir, comme le quarré de O6 est au quarré de P7, ainsi C6 est à C7 ; d'où il s'ensuit que la figure CZ10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G1 soit triple de A1, alors C6 sera triple du même A1, & la parabole CZ10 sera triple de la parabole ABC. La même chose se fera toûjours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré-quarrez, quarré cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera

la quadrature de la parabole. Pour cet effet il faut considérer dans A B C que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure C Z 10, je la puis considérer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre CI en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à CI, comme à la figure précedente, & partant elle doit rencontrer la ligne CI.) De ce même point B on tire BZ parallele à C I qui rencontrera la ligne CQZ; car cette ligne n'est formée que par l'extrémité des lignes paralleles à CA. Du point de la rencontre soit fermée la figure CQZ 10. Les ordonnées de la parabole ABC seront égales aux ordonnées de la parabole CZ 10. Mais les portions de l'axe de la parabole ABC ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole CZ 10; partant celles-ci sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole CZ 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole A B C; & partant la parabole CZ 10 sera double de A B C, ou du triligne qui lui est égal BCQZ; & le parallelogramme CBZ 10 triple de la même parabole ABC; donc ladite parabole C Z 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme CBZ 10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole, puisque j'ai un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archiméde s'étant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de même la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes DA 1, & OCL sont égaux; & pour cet effet ayant tiré la ligne droite CD, je dis que le triligne CDA est la moitié du quadriligne CODA: si donc de ce quadrili-

gne j'ôte le parallelogramme CLD 1, il restera les trilignes COL & AD 1 ; si du triligne on ôte le triangle CD 1, il restera le triligne DA 1 ; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ai tiré une partie double d'une partie que j'ai tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit être double du reste de la petite, & de cette sorte DA 1, & LCO sont doubles de DA 1 ; donc DA 1 sera égal à LCO, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne CD coupe en deux également le quadriligne CODA (car il n'est pas toûjours véritable.) Pour cet effet on suppose OD pour un des côtez du parallelogramme, & pour l'autre la portion DA indivisible sur la touchante DG ou sur la ligne courbe DA qui est la même chose, & le triangle CD avec la même portion indivisible DG ou DA. Je dis que le parallelogramme est double du triangle ; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mêmes paralleles, sçavoir OC & DG ; ainsi CD coupe le parallelogramme, ou pour mieux dire, le quadriligne ODAC en deux également ; car nous ne considérons plus l'espace DAG ni celui qui est compris entre la courbe OC & la droite OC ; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir CD, CE, & les autres à l'infini ; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace ABC comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes DO, EP, FQ, &c.) remplissent l'espace ZBACQZ, soit que les lignes BZ & CQZ se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe AC. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes ; comme le cylindre fait sur l'axe

CA par le parallelogramme CADO; le cône fait sur la même CA, & par le triangle CAD; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur même base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en même raison; & partant le solide fait de ABC sera le tiers du solide ZBACQZ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontre point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce côté-là, & ôtant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du même ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considérer ces figures comme paraboles; & par conséquent la touchante du point B, ou plûtôt la ligne tirée de B parallele à AC rencontra la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas sera double de celui d'enhaut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a vû que le solide de AB étoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10;

& ainsi le solide de CZ 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

Voyez la Figure de la page 354.

Il faut maintenant considérer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extrémité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chacun desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinis : de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

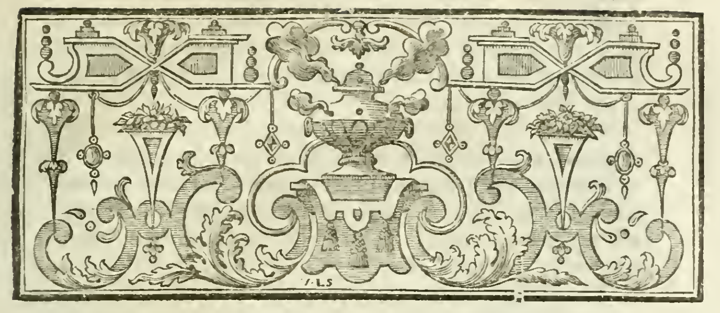
On considérera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend ici que les lignes DOEP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand même les lignes A 16 & B 16 étant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la même chose plus briévement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, étant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCAB est égal à BCA 16; ôtant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a été ci-devant montré égal à ABC, & partant 16 AB lui est aussi égal.

Maintenant ſoit ABC la premiere parabole, la touchante B I rencontrant C I, la ligne B 16 égale & parallele à C I rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I ſera une parabole égale & ſemblable à ABC : car les ordonnées de l'une ſont égales aux ordonnées de l'autre, ſçavoir, D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puiſqu'elles ſont entre les mêmes paralleles ; & par la proprieté de la parabole, AG eſt égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. ſçavoir les portions de l'axe où aboutiſſent les ordonnées correſpondantes ſont égales ; & partant toute la parabole ABC ſera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'eſpace BA 16 eſt égal à ABC ; partant les trois pieces ou eſpaces ABC, A 16 I, & BA 16 compriſes dans le parallelogramme ICB 16, & qui le forment, ſont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire ici de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui eſt la même choſe, ſe doit entendre auſſi des paraboles des autres genres, c'eſt-à-dire que, ſi la parabole ABC eſt du troiſiéme genre, la parabole A 16 I ſera auſſi du troiſiéme genre ; mais elle ne ſera pas la même que la parabole ABC : car les parties AG, AH, AR, &c. ſont bien entr'elles en même raiſon que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais AG n'eſt pas égale à A 1, ni AH égale à A 2 &c. comme elles ſont dans la parabole du premier genre.



DE



DE TROCHOIDE EJUSQUE SPATIO.

DEFINITIONES.

SI circulus duplici motu ſimul & eodem tempore moveatur, altero quidem recto, quo centrum illius feratur ſecundùm lineam rectam: altero autem circulari, quo ipſe cum omnibus ſuis radiis circa centrum ſuum circumvolvatur; ſitque uterque motus ſibi ipſi ſemper uniformis, & alter alteri æqualis, ita ut recta quam percurrit centrum ſpatio unius integræ converſionis circumferentiæ, intelligatur eſſe eidem circumferentiæ æqualis: atque inter movendum circulus ipſe perpetuò maneat in eodem plano infinito in quo extitit in initio motûs: ejuſmodi circulum vocamus *Rotam.*

Recta per quam fertur centrum, vocetur *iter centri.*

Quæcunque puncta vel lineæ à circulo denominantur, denominentur hîc à rotâ, ut centrum rotæ, radius rotæ, circumferentia rotæ, &c.

Manifestum est autem circumferentiam rotæ contingere continuè & successivè in aliis atque aliis punctis quandam lineam rectam itineri centri parallelam : vocetur hæc *via rotæ*.

Manifestum est quoque quidquid accidat in quâvis integrâ circumvolutione rotæ, idem quoque accidere in quâcunque aliâ : modo initia circumvolutionum sumantur à radiis similiter positis, id est, qui cum itinere centri æquales ad easdem partes angulos constituant, sintque radii ipsi paralleli.

Nos itaque unam conversionem assumamus, cujus initium statuimus in eo rotæ radio qui perpendicularis est tam viæ rotæ quàm itineri centri, cumque ipsum radium, dum ad motum rotæ movetur, consideramus ac prosequimur, donec absolutâ integrâ conversione, idem ab eadem parte fiat rursus iisdem viæ rotæ & itineri centri perpendicularis. Hic ergo radius in initio circumvolutionis vocetur *radius principii motûs*: in medio autem dum ipse perpendicularis est itineri centri, sed ad alteras partes constitutus, dicetur *radius medii motûs* : & tandem in fine, *radius perfecti motûs*.

Quòd si radius ipse in quâcumque positione produci intelligatur utrinque quantùm libuerit etiam extra rotam, idem dicetur linea principii, medii, vel perfecti motûs.

Jam in lineâ principii motûs indefinitè productâ versùs viam rotæ intelligatur sumptum quodcumque punctum præter centrum, atque inter ipsum centrum versùs viam rotæ, etiam in eâdem viâ aut ultrà, cujus puncti motus spectetur : fiet necessariò ut propter implicationem motûs circularis cum recto, ipsum punctum describat lineam aliquam, cujus portio quædam ab unâ parte itineris centri, altera autem portio ab alterâ parte existat ; ea autem incipiet in lineâ principii motûs, & in lineâ perfecti motûs definet. Vocetur hæc *Trochoides*.

Recta quæ Trochoidis hujus extrema puncta jungit, estque vel via rotæ, vel ei parallela, dicatur *Trochoidis ejusdem basis.* Portio lineæ medii motûs intercepta inter trochoidem & basim ejus, *axis Trochoidis* vocabitur; qui quidem axis ab itinere centri bifariam secabitur in puncto quod nos *centrum trochoidis* nuncupamus. *Vertex* autem *trochoidis* est extremum axis punctum in trochoide existens, seu basi oppositum.

Jam manifestum est à trochoide & ab ejusdem basi comprehendi spatium quoddam planum; quod nos postea vocabimus *spatium trochoidis.* Ejus centrum, basis, axis & vertex iidem qui trochoidis intelligantur.

Quæcunque recta ab aliquo puncto trochoidis ducitur usque ad axem parallela viæ rotæ, dicatur *ad axem ordinata.*

Item, mensura integri motûs conversionis rotæ intelligatur tota circumferentia rotæ: mensura dimidii motûs intelligatur dimidia circumferentia; & sic in universum mensura cujusvis partis motûs rotæ intelligatur esse arcus circumferentiæ ejusdem rotæ, qui ad integram circumferentiam eandem habeat rationem, quam pars motûs assumpta ad motum conversionis integræ.

Præterea, si circa axem trochoidis tanquam circa diametrum, & circa ejusdem trochoidis centrum circulus describatur, is erit vel rota ipsa, vel eâdem major aut minor, prout punctum, quod trochoidem descripsit, sumptum fuerit vel in circumferentiâ rotæ, vel extra vel intra ipsam rotam. Et siquidem circulus ipse sit rotæ æqualis, seu rota ipsa; tunc ipsa trochoides denominabitur à rota simplici, diceturque *trochoides rotæ simplicis*, seu *trochoides veræ rotæ.* Si autem ipse circulus circa axem trochoidis descriptus major sit quàm rota, tunc trochoides denominabitur à rotâ contractâ, diceturque *trochoides rotæ contractæ.* Si tandem circulus minor sit ip-

sâ rotâ, ejus trochoides denominabitur à rotâ prolatâ, diceturque *trochoides rotæ prolatæ*. Spatia, bases, & cætera ad ipsas trochoides pertinentia, curvæ suæ denominationem sortiantur : at circulus ipse circa axem trochoidis tanquam circa diametrum descriptus, dicatur circulus suæ trochoidi proprius.

Et quia positis iis quæ jam dicta sunt, concipi potest duplex rotæ motus circularis, prout motus circuli circa centrum intelligi potest fieri ad hanc vel illam partem : nos eum assumimus, qui rotis communibus convenit, quo quidem motu pars interior circumferentiæ, putà quæ adjacet viæ rotæ, fertur non ad easdem parter ad quas centrum tendit motu recto, sed ad contrarias ; superior autem rotæ pars quæ viæ ejus opponitur, fertur secundùm motum centri. Hic enim motus omnium rotarum physicarum proprius est & veluti naturalis ; alter autem eidem contrarius est, veluti violentus & contra naturam rotæ : geometricè tamen uterque considerari potest, nec alia inter trochoides quæ ab ipsis orientur, accidet differentia, nisi quod quæ partes erant unius extremæ in alterâ, eædem erunt mediæ ; spatia autem longè different cùm figurâ tùm magnitudine, sed quia unum erit veluti complementum alterius, ideo ex uno noto dabitur alterum ; quam speculationem nos in aliud tempus remittimus. Agimus autem hîc de trochoide rotæ tam simplicis quàm prolatæ & contractæ, sed motu communi rotæ physicæ motæ, ac de eâ & de spatio ejus sequentia enuntiamus Theoremata, quorum pars statim demonstrabitur ; reliqua autem pars quæ longissimæ & acutissimæ speculationis est, opportuno tempore suam nanciscetur demonstrationem, quam quidem à nobis inventam (ut cætera quæ ad rotam pertinent) eo usque retinemus donec per tempus liceat integrum opus producere.

Supponimus autem quædam quæ etsi per se demonſtrationem requirant, tamen ea tam facilis eſt, ut cuivis in Geometriâ mediocriter verſato ſtatim appareat, qualia ſunt hæc. In primo quadrante integræ converſionis rotæ punctum quod trochoidem deſcribit, percurrit ſpatium quod eſt inter baſim trochoidis & iter centri; idemque punctum motu recto poſterius eſt centro rotæ. In ſecundo quadrante idem punctum percurrit ſpatium quod eſt ab itinere centri uſque ad verticem trochoidis, eſtque adhuc poſterius centro rotæ. In tertio quadrante punctum idem percurrit ſpatium quod eſt à vertice trochoidis uſque ad iter centri, ſed jam hoc punctum præcedit reſpectu centri, quod ſequitur ſi motus recti habeatur ratio. In quarto & ultimo quadrante punctum de quo agimus percurrit ſpatium quod eſt ab itinere centri uſque ad baſim trochoidis, & adhuc idem punctum præcedit, centrum autem rotæ ſequitur motu recto.

Hinc verò atque ex quibuſdam aliis quæ naturam rotæ motæ, ut dictum eſt, ſtatim conſequuntur, demonſtrabitur facilè trochoidem quæ fit ab unicâ converſione cujuſcunque rotæ in ſeipſam non recurrere, ſeu per idem punctum bis tranſire non poſſe : contrarium autem accideret in rotâ prolatâ, ſi aliud à noſtrâ ſumeretur principium.

Nec minus facilè eſt demonſtrare eam trochoidis partem, quæ eſt à principio uſque ad verticem æqualem eſſe & ſimilem alteri parti quæ eſt à vertice uſque ad finem, & ambas partes ſibi invicem congruere poſſe. Item, primam medietatem ejuſdem trochoidis totam eſſe ab unâ parte axis, ſecundam verò totam eſſe ab altera. Idem dictum intelligatur de duabus partibus ſpatii ipſius trochoidis quæ ab ejuſdem axe conſtituuntur. Atque ita quæ in unâ ex his medietatibus demonſtrabuntur, in alterâ quoque medietate demonſtrata eſſe quivis facilè

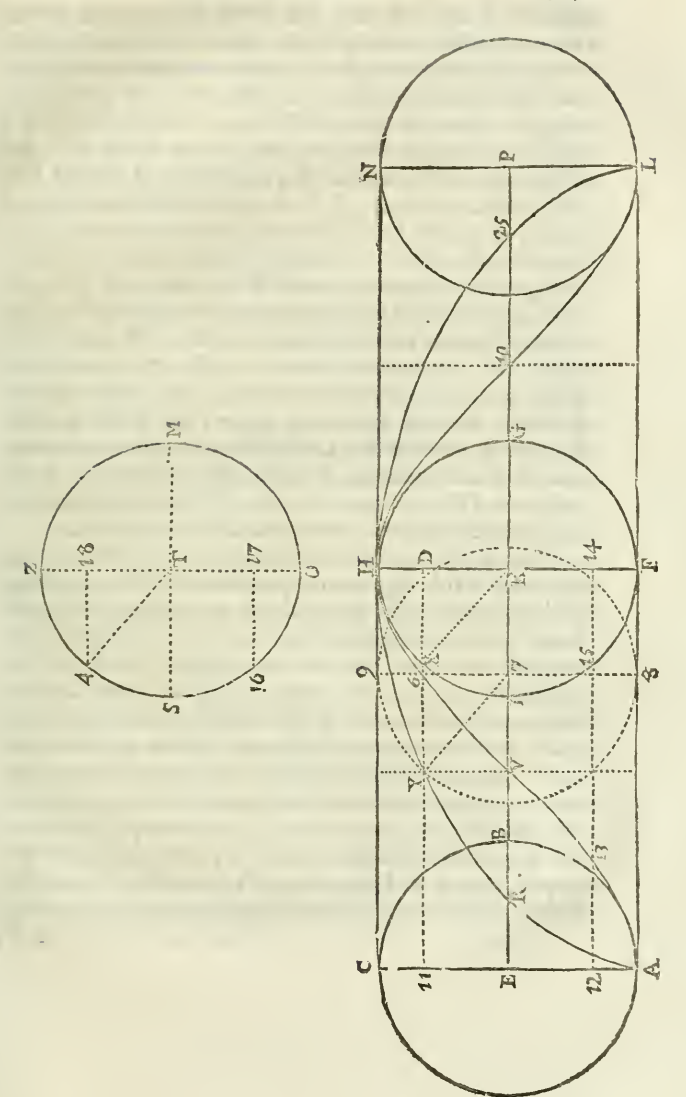
intelliget, collatis invicem duarum medietatum partibus illis quæ ſunt prope verticem &c. His poſitis primaria trochoidis proprietas, quam propterea demonſtrabimus, videtur eſſe hæc.

Propositio Prima.

Si ab aßumpto puncto primæ medietatis trochoidis ad axem ordinata ſit recta quævis, ejus portio quædam erit extra circulum ipſi trochoidi proprium; quæ quidem portio æqualis erit arcui rotæ, qui menſurat eam partem motûs, quæ reſtat inde ab eo tempore, quo notatum eſt à puncto mobili punctum aſſumptum, uſque ad medietatem integræ converſionis rotæ.

Esto recta EP; iter centri rotæ cujuſdam æqualis circulo ſeorſim poſito SOMZ, cujus centrum T; ſitque recta CEA linea principii motûs, intelligaturque recta EP æqualis circumferentiæ rotæ SOMZS, & recta NPL ſit linea perfecti motûs. Tum diviſâ EP bifariam in puncto K, ducatur recta HKF, quæ ſit linea medii motus; puncta autem A, F, L ſint ad eaſdem partes reſpectu rectæ EP, & puncta C, H, N ad eaſdem partes inter ſe, ſed ad alteras reſpectu ejuſdem rectæ EP, & punctorum A, F, L.

Concipiatur jam in linea principii motûs C E A aſſumptum eſſe punctum A, ad deſcribendam trochoidem, ſive recta EA æqualis ſit ſemidiametro rotæ TO, quo pacto fiet trochoides rotæ ſimplicis; ſive ipſa EA major ſit quàm TO, ut fiat trochoides rotæ prolatæ; ſive denique minor ut habeamus trochoidem rotæ contractæ: moveaturque rota hoc pacto ut centrum illius percurrat rectam EP, interim dum ipſa motu circulari abſolverit unam integram converſionem circa idem centrum, poſito utroque motu ſibi ipſi ſemper uniformi:


N
P
L
25
10
G
M
Z
18
T
17
O
A
S
16
H
D
E
14
F
2
6
7
15
8
Y
V
B
13
R
C
E
A
11
12

feratur autem unà cum rotâ recta EA, quæ ad motum rotæ æqualiter circumvolvatur, ita ut in medio motûs integræ conversionis ipsa EA conveniat rectæ KH, in fine autem eadem conveniat rectæ P L; sicque propter implicationem motûs circularis cum recto punctum A describat trochoidem ARYHL, cujus basis AL, axis HF, vertex H, centrum K, & spatium A R Y H L A; sint etiam puncta A, F, L in eâdem rectâ lineâ quæ est basis, & puncta C, H, N in aliâ rectâ ipsi basi & itineri centri parallelâ, ut sit ALNC parallelogrammum rectangulum. Præterea centro K, & intervallo KH, seu KF, æquali ipsi EA, describatur circulus HIFG, cujus circumferentia secet iter centri versùs principium quidem in I, versùs finem autem in G, qui circulus erit proprius trochoidi ex definitione, eritque idem vel æqualis rotæ, vel ipsâ major aut minor, quod hoc loco nihil refert. Item in lineâ ARYH, quæ est prima medietas trochoidis sumatur quodcunque punctum Y, à quo ad axem HF, ordinata sit recta YD secans primam semicircumferentiam circuli proprii in puncto X.

Dico primò portionem aliquam ipsius YD esse extrà circulum FIH. Quia cum punctum Y est in primâ medietate trochoidis, quæ quidem per ipsum punctum Y semel tantum transit, ut superius positum est, non potest esse nisi unica positio rotæ in quâ illâ existente notatum est punctum Y, atque in illâ positione centrum ipsius rotæ extitit inter puncta E, K, scilicet intra primam medietatem itineris centri. Existat igitur eâ positione centrum illud in puncto 7, per quod ducatur recta 8 7 9 parallela lineæ medii motûs FKH, secans basim quidem AL, in puncto 8, rectam verò CN in puncto 9; ducatur quoque recta 7 Y, quæ quia ducitur à centro rotæ 7 in hac positione ad punctum Y, quod in eâdem positione trochoidem describit, æqualis erit rectæ EA,

EA, seu potius recta 7 Y erit ea ipsa EA, cujus punctum E motu recto pervenit in 7, punctum autem A motu implicato perlatum est in Y, describens trochoidis portionem ARY, & eadem recta motu circulari rotæ positionem suam mutavit secundùm angulum 8 7 Y: huic ergo angulo constituatur æqualis OT4 rotæ seorsim positæ, cujus OTZ sit diameter, & punctum 4 in circumferentiâ.

Conveniente ergo per intellectum centro T cum centro 7, & angulo OT4 angulo 8 7 Y, sive latera æqualia sint, sive non, manifestum est ex naturâ rotæ, arcum O 4 esse mensuram motûs jam peracti à principio conversionis; & arcum 4Z qui cum O4 complet semicircumferentiam rotæ, esse mensuram motûs qui deest ad complendam dimidiam conversionem: & quia æquales sunt ambo motus rotæ, circularis scilicet & rectus, & uterque uniformis sibi ipsi, manifestum est quoque rectam E7 æqualem esse arcui O 4, & rectam 7 K arcui 4 Z: quod notetur.

Centro 7, intervallo autem 7Y, vel 7 8, vel 79, quæ æqualia sunt, describatur circulus cujus diameter erit 8 7 9. Quoniam ergo per ea quæ posita sunt punctum Y in prima medietate trochoidis existens sequitur post centrum motu recto, erit ipsum Y respectu diametri 8 9 versùs principium curvæ, jacebitque propterea ipsa diameter 8 9 inter punctum Y & axem HF, eademque secabit rectam YD ordinatam ad axem, esto in puncto 6: rectæ ergo DH, 69 æquales sunt, sicuti & rectæ FD, 8 6; & rectangulum FDH, æquale rectangulo 8 6 9, quæ rectangula cum sint æqualia quadratis XD, Y 6, erunt hæc quadrata æqualia, & recta DX æqualis rectæ 6 Y: sed recta DY major est quàm 6 Y, totum scilicet parte; ergo eadem DY major est quàm DX; excessus autem est portio XY; hæc itaque portio

eſt extra circulum FXH trochoidi AYH proprium; quod primo loco demonſtrandum erat.

Dico ſecundò eandem portionem exteriorem XY, æqualem eſſe arcui 4 Z. Quoniam enim oſtenſæ ſunt æquales DX, & 6 Y, ſunt autem puncta X 6 vel ſimul, vel ſejuncta, & hoc caſu vel punctum X eſt inter puncta D & 6, vel è contrario ipſum X eſt inter puncta 6, Y, ſecundùm diverſas ſpecies trochoidum rotæ ſimplicis, prolatæ, vel contractæ, quod hoc loco nihil refért: quidquid ſit additâ vel ſubtractâ communi X 6, ſi quæ inter puncta X 6 interjaceat, fiet recta D6 æqualis rectæ XY, eſt autem D 6 æqualis rectæ K 7, ſeu arcui 4 Z, ut notatum eſt; quare & recta XY eidem arcui 4 Z eſt æqualis, quod ſecundo loco demonſtrandum erat: quare conſtat Propoſitio.

Corollarium primum.

HINC manifeſtum eſt arcum XH ſimilem eſſe arcui rotæ 4 Z, ſicuti arcus FX ſimilis eſt arcui O 4; & eſt 4 Z quicunque arcus menſurans motum qui deeſt ad dimidiam converſionem, & O 4 menſurat motum jam tranſactum, quod notaſſe in ſequentibus uſui erit.

Corollarium ſecundum.

HIC demonſtrari poteſt in rotâ ſimplici, atque in prolatâ rectam 6 D majorem ſemper eſſe quàm XD propterea quod ipſa rota ſeu circulus O 4 Z tunc æqualis eſt circulo proprio FXH, vel ipſo major; ideoque arcus 4 Z, æqualis eſt arcui XH, vel ipſo major, quia ſimiles ſunt ipſi arcus. Sed recta 6 D æqualis eſt arcui 4 Z, ex demonſtratis; quare eadem 6 D æqualis eſt arcui XH, vel ipſo major: arcus autem XH ſem-

per major est rectâ XD; quare hoc casu recta 6 D semper major est quàm XD.

In rotâ autem contractâ, quia ipsa rota minor est quàm circulus sibi proprius FXH, atque ideo arcus 4 Z semper minor est arcu sibi simili XH secundùm rationem diametri rotæ ad diametrum circuli sibi proprii, erit recta 6 D, quæ æqualis est arcui 4 Z, semper minor arcu XH, secundùm eandem rationem; hic autem arcus XH, quia assumptus est utcunque minor semicircumferentiâ circuli proprii FIH, potest habere ad rectam XD quamcunque rationem majoris ad minus, scilicet ut diameter FH, ad diametrum rotæ OZ. Fieri ergo poterit aliquando ut arcus XH ad rectam XD eandem habeat rationem quam ad rectam 6 D, aliquando majorem & aliquando minorem; ideoque in rotâ contractâ poterit recta 6 D æqualis esse rectæ X D, vel ipsa major aut minor: atque ita puctum 6 erit vel simul cum puncto X, vel inter puncta Y, X; vel inter puncta X, D.

Et quidem quòd res ita se habeat in universum ex his satis patet; quibus autem in punctis quave positione rotæ omnes istæ differentiæ accidant in datâ quâcunque ratione diametri rotæ contractæ ad diametrum circuli sibi proprii demonstrare longum esset & difficillimum, opusque esset hoc assumpto; scilicet dato cuivis arcui circumferentiæ circuli, intelligi posse rectam lineam æqualem, minorem, vel majorem.

Corollarium tertium.

Illud quoque ex demonstratis statim apparet, scilicet trochoidem occurrere circumferentiæ circuli sibi proprii in unico puncto verticis, atque in eo puncto tantùm lineas ipsas sese tangere, ipsumque circulum totum contineri interi spatium ejusdem trochoidis.

Corollarium quartum.

HInc præterea clarum eſt ipſam trochoidem non eſſe lineam rectam nec ex duabus rectis compoſitam, ſiquidem illa à puncto A pervenit ad punctum H, nec tamen ingreditur aut ſecat circulum proprium FXH, quem ſecaret neceſſariò ſi recta eſſet à puncto A ad punctum H, ſive à puncto H ad punctum L: non eſt ergò recta, nec ex duabus rectis compoſita.

Quod autem cujuſcunque trochoidis nulla pars lineæ rectæ congruere poſſit, ſed omnes partes ſint curvæ, atque penitùs ab aliis quibuſcunque curvis huc uſque notis diverſæ, demonſtrari quidem poteſt, ſed demonſtratio longa eſt & difficilis, neque hujus loci, quandoquidem ad ea quæ intendimus non requiritur.

Corollarium quintum.

QUia in antecedenti Propoſitione punctum 6 eſt ſectio communis rectæ ordinatæ YD & rectæ 8 7 9, quæ eſt diameter circuli 8 Y 9, qui concentricus eſt rotæ ira poſitæ, ut centrum illius ſit 7: ſi intelligatur alia atque alia poſitio rotæ ab initio motûs donec centrum illius percurrerit rectam EK, manifeſtum eſt aliud atque aliud fore ipſum punctum 6; ipſumque moveri incipere à puncto A, & in medio motus integræ converſionis rotæ, idem pervenire ad punctum H, atque adeo ipſum ferri ſecundùm lineam quandam A 6 H ſecantem rectam EK in puncto V. Quòd ſi idem ferri intelligatur à puncto H ad punctum L, fiet reliqua dimidia pars ejuſdem novæ lineæ, ſecans rectam KP in puncto 10; atque ideo ipſa integra erit AV 6 H 10 L, hanc nos vocamus *trochoidis comitem*, ſeu *ſociam.*

Vertex, basis, axis & centrum illius eadem sunt quæ trochoidis, cujus illa comes est. Quod autem ab ipsa & basi suâ comprehenditur spatium planum, ab eâdem denominetur. Item, quæ à trochoide & ab ejus comite comprehenduntur duo spatia, quorum alterum est AYHVA, inter lineas principii & medii motus: alterum verò ei simile & æquale inter lineas medii & perfecti motus; singula à duabus illis lineis simul nomen sortiantur, dicaturque unumquodque spatium trochoide & suâ comite contentum: ordinata ad axem comitis trochoidis dicatur quævis recta à quocunque puncto ejusdem comitis ad axem ducta parallela basi.

Propositio Secunda.

Si à quocunque puncto trochoidis ad axem ordinetur recta quæpiam, hujus portio erit ordinata ad axem comitis ejusdem. quæ quidem portio æqualis erit ei ejusdem ipsius ordinatæ ad trochoidem portioni, quæ interjicitur inter ipsam trochoidem & circumferentiam convexam circuli eidem trochoidi proprii.

Manifesta est hæc Propositio ex iis quæ jam demonstrata sunt. Esto enim YD recta quæcunque à puncto Y in trochoide existente ad axem FDH ordinata, & ponantur eadem quæ superiùs. Existit punctum 6 in ejusdem trochoidis comite, ex definitione; & recta 6 D erit ad axem ipsius comitis ordinata: recta verò XY interjicitur inter trochoidem & circumferentiam convexam circuli ipsi proprii. Ostensum autem est rectas ipsas 6 D & XY esse inter se æquales; quare patet Propositio, quæ id tantum enuntiabat.

Corollarium primum.

HINC manifestum est eandem ordinatam 6 D æqualem esse arcui rotæ 4 Z.

Corollarium secundum.

PERSPICUUM est etiam rectam Y 6, quæ interjicitur inter trochoidem & ejus sociam, æqualem esse rectæ XD interjectæ inter circumferentiam circuli proprii & axem.

Corollarium tertium.

SED & hic demonstrari potest in rotâ simplici comitem trochoidis occurre circumferentiæ circuli proprii in vertice tantùm, atque in eo solo puncto lineas ipsas sese contingere. Quod idem accidit comiti trochoidis rotæ prolatæ. At in curva rotæ contractæ comes secat circumferentiam circuli proprii infra verticem, idque semel tantùm in primâ dimidiâ conversione rotæ, & rursus semel tantùm in alterâ dimidiâ conversione: ac præterea eadem comes eandem circumferentiam tangit interiùs in vertice, cujus quidem Enunciati longa est demonstratio, non tamen ita difficilis; sed de his aliàs.

Corollarium quartum.

ID autem peculiare est rotæ simplici, quod angulus contactus qui fit à comite trochoidis illius & circumferentiâ circuli ipsi proprii, minor sit omni angulo contactus duorum quorumvis circulorum etiam interiùs sese tangentium: quod rursùs in alium locum remittimus,

propter prolixitatem demonstrationis, quæ tamen non est admodum difficilis.

Corollarium quintum.

ITEM cujuslibet trochoidis comes nec recta est, nec ex duabus aut pluribus rectis composita; nec trochoidi nec alii cuivis curvæ ex iis quæ huc usque notæ sunt ita occurrere potest ut pars sit eadem, & pars non sit communis: quod, quia demonstrare longum est & difficillimum, neque ad ea quæ intendimus requiritur, ideo prætermittimus.

PROPOSITIO TERTIA.

Si à quocunque puncto primi quadrantis comitis trochoidis ad axem ipsius ordinata sit recta quævis, quæ usque ad lineam principii motûs producatur; item ab aliquo puncto secundi quadrantis ejusdem comitis eodem modo ordinata sit alia recta (modo ipsæ ordinatæ æqualiter distent hinc inde ab itinere centri rotæ) earum rectarum sic productarum portiones permutatim sumptæ, erunt æquales; ita ut quæ in unà earum rectarum inter comitem & axem interjicitur portio, æqualis sit ei alterius rectæ portioni quæ interjicitur inter eandem comitem & lineam principii motûs, & reciprocè.

PONANTUR eadem quæ suprà in eâdem figura; atque in linea A 13 V, primo scilicet quadrante comitis, sumptum sit punctum quodcunque 13, à quo ad axem F H ordinata sit recta 13 14, quæ minor erit quàm AF, quia ipsa AF æqualis est semicircumferentiæ rotæ; 13 14 autem ipsâ semicircumferentiâ minor. Producatur ergo eadem 13 14 donec occurrat lineæ

principii motûs AC in puncto 12. Tum in axe FH intelligatur portio KD æqualis portioni K 14; ſed ad diverſas partes, & ducatur recta D 6 11 parallela rectæ KE, occurens comiti quidem in puncto 6, quod erit in ſecundo ipſius quadrante, lineæ autem AC in puncto 11. Dico rectam 13 14 æqualem eſſe rectæ 6 11, & reciprocè rectam 13 12 æqualem eſſe rectæ 6 D. Secet enim recta 12 14 circumferentiam FIH in puncto 15; & recta 11 D ſecet eandem circumferentiam in puncto X, ſintque puncta 15, X in eâdem ſemicircumferentiâ quæ eſt versùs principium motûs: item in ſemicircumferentiâ rotæ OSZ, ſit arcus Z 4 ſimilis arcui HX; & arcus Z 16 ſimilis arcui H 15; ſintque ZS, & OS quadrantes, ſicuti HI, & FI. Jam quia æquales ſunt rectæ K 14, KD erunt arcus IX, & I 15 æquales. Item æquales erunt arcus F 15, HX; & æquales FX, H 15: ac propterea in rotâ æquales erunt arcus S 4, S 16. Item æquales arcus O 16 & Z 4; & æquales O 4, Z 16. Quare ex Corollario primo Propoſitionis primæ, quia arcus HX, ſimilis eſt arcui qui menſurat motum, qui ſupereſt ad dimidiam converſionem in eâ poſitione rotæ, erit arcus Z 4 ea ipſa menſura ejuſdem motûs. Eâdem ratione erit arcus Z 16 menſura motûs qui ſupereſt ad dimidiam converſionem rotæ, dum notatur ab ipsâ punctum 13; ac proterea ex Corollario primo Propoſitionis ſecundæ, tam recta 6 D æqualis eſt arcui 4 Z, quàm recta 13 14 æqualis arcui 16 Z: ambo autem ipſi arcus 4 Z & 16 Z ſimul ſumpti æquales ſunt ſemicircumferentiæ OZ (oſtenſus eſt enim arcus 4 Z æqualis ipſi 16 O) ideoque duæ rectæ 6 D & 13 14 ſimul ſumptæ æquales ſunt eidem ſemicircumferentiæ OZ, ſive rectæ D 11, vel 14 12. Demptis ergo communibus ſequitur rectam 13 12 æqualem eſſe rectæ 6 D; & rectam 13 14 æqualem eſſe rectæ 6 11; quod erat oſtendendum.

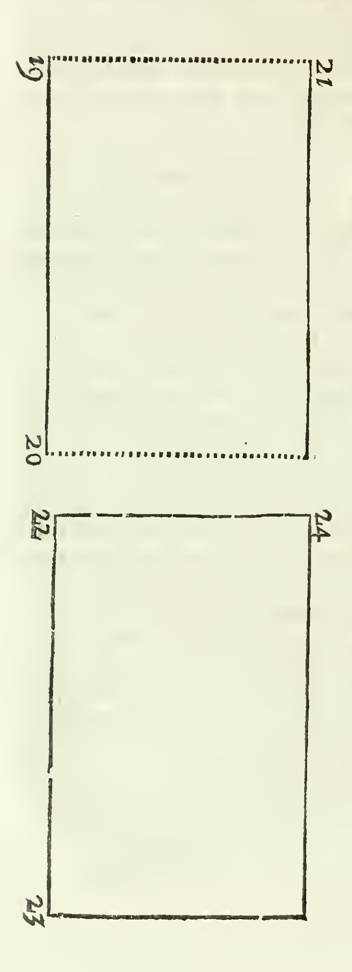
Propositio

PROPOSITIO QUARTA.

Quod à trochoidis comite & ab ipsius base continetur, spatium dimidium est rectanguli cujus eadem est basis & eadem altitudo cum trochoide vel ejus comite, sumpto axe communi pro altitudine.

IN eâdem rursùs figurâ. Dico spatium quod à comite AVH 10 L & basi ejus AL continetur, dimidium esse rectanguli ACNL, cujus eadem est basis AL & eadem altitudo axis FH. Consideretur enim ipsius rectanguli dimidium ACHF, quod à curvâ AVH ipsius comitis dimidia, in duas partes dividitur, quarum partium altera continetur ab ipsâ curvâ AVH & duabus rectis AF, FH, altera autem pars continetur ab eâdem curva AVH & duabus rectis HC, CA. Ostendendum est duas illas partes esse inter se æquales. Atqui ex antecedenti Propositione facile est ostendere duas easdem partes omnino sibi invicem superponi posse & congruere, posito scilicet puncto C cum puncto F, & rectâ CA cum recta FH; item recta CH cum recta FA: tunc enim quia recta C 11 æqualis est rectæ F 14, congruet punctum 11 cum puncto 14, & recta 11 6 cum recta 14 13, cui æqualis ostensa est; & eodem modo recta A 12 congruet rectæ HD, & recta 12 13 rectæ D 6, cui æqualis ostensa est, & reliquæ reliquis, & omnes omnibus, & spatium spatio congruet. Quare ipsa spatia sunt æqualia, & spatium AVHFA dimidium est rectanguli FC. Idem verò in reliquo rectangulo FN ostendetur eodem modo, ideóque vera est Propositio.

PROPOSITIO QUINTA.



Idem spatium proportione medium tenet inter duplum rotæ & duplum circuli trochoidi proprii.

PONANTUR eadem. Dico spatium AVH 10 LA proportione medium esse inter duplum rotæ OSZM, & duplum circuli FIHG trochoidi proprii. Intelligantur enim duo rectangula, alterum quidem 20 21, cujus basis 19 20 æqualis sit semicircumferentiæ rotæ OSZ, altitudo vero 19 21 æqualis diametro ejusdem rotæ OZ; alterum verò rectangulum 23 24, cujus basis 22 23 æqualis sit semicircumferentiæ circuli proprii FIH, altitudo autem 22 24 æqualis diametro ejusdem circuli FH. Jam quia duo rectangula 20 21

& FC æquales habent bases 19 20 & AF (quia utraque basis, ex positis, æqualis est semicircumferentiæ rotæ) erunt ipsa rectangula inter se ut altitudines, scilicet ut diameter rotæ OZ ad FH diametrum circuli proprii. Item, rectangulum FC ad rectangulum 23 24 ejusdem altitudinis FH, ex constructione, se habet ut basis AF ad basim 22 23, idest ut semicircumferentia rotæ OSZ ad semicircumferentiam circuli proprii FIH, quia ex constructione æquales sunt ipsæ bases iisdem semicircumferentiis. Ut autem semicircumferentia OSZ ad semicircumferentiam FIH, ita diameter OZ ad diametrum FH : quare ut rectangulum FC ad rectangulum 23 24, ita diameter OZ ad diametrum FH. Ut autem hæ diametri inter se, ita ostensum est rectangulum 20 21 ad rectangulum FC; ideoque eadem est ratio rectanguli 20 21 ad rectangulum FC, quæ ejusdem rectanguli FC ad rectangulum 23 24, quia utraque ratio eadem est rationi diametri OZ ad diametrum FH. Sed rectangulum 20 21 duplum est rotæ OSZM, ut ex Archimede in circuli dimensione deducitur, sicuti rectangulum 23 24 duplum est circuli FI HG & rectangulum FC æquale est spatio proposito AVHLA, quia dimidium dimidio ostensum est æquale per præcedentem. Quoniam ergo continuè proportionalia ostensa sunt rectangula 20 21, FC, & 23 24, patet quoque proportionalia esse spatia ipsis æqualia, scilicet duplum rotæ OSZM, spatium AVH 10 LA, & duplum circuli proprii FIHG, & medium esse spatium AVH 10 LA, ut proponebatur.

Corollarium.

Hinc patet idem spatium AVH 10 LA in trochoide rotæ simplicis, duplum esse ejusdem rotæ; in trochoide autem rotæ prolatæ idem spatium majus esse quàm duplum rotæ; & tandem in trochoide rotæ con-

tractæ, minus quam duplum ipſius rotæ. Nam in rotâ ſimplici circulus F H ipſi rotæ æqualis eſt; in prolatâ minor; in contractâ major: unde ſpatium quod inter duplum rotæ & duplum circuli FH mediam tenet proportionem, in ſimplici quidem æquale eſt duplo rotæ; in prolatâ majus quàm duplum; & in contractâ minus.

Propositio Sexta.

Quod à trochoide & ejus comite continetur ſpatium inter lineas principii & medii motûs, æquale eſt dimidio circuli eidem trochoidi proprii.

In eâdem figurâ eſto ſpatium ARHVA contentum à dimidio trochoidis A R H, & dimidio comitis ejus AVH inter lineas principii & medii motûs AC, FH. Dico hoc ſpatium æquale eſſe ſemicirculo FIH.

Ducatur enim quæcunque recta Y D parallela baſi AL, ſecanſque tam ſpatium quàm ſemicirculum; & portio quidem ipſius YD intercepta intra ſpatium, ſit Y 6; portio autem intercepta intra ſemicirculum, ſit XD: manifeſtum eſt igitur ex Corollario ſecundo Propoſitionis ſecundæ, portiones ipſas Y 6 & XD eſſe æquales; quod idem in cæteris ſimiliter ductis baſi AL parallelis accidet. Itaque quoniam ſpatium & ſemicirculus ſunt intra parallelas AF, CH & cujuſvis aliûs rectæ eidem parallelæ, & interjacentis portiones in ſpatio & in ſemicirculo interceptæ ſunt æquales, ſequitur ſpatium ipſum A R H V A ſemicirculo F I H eſſe æquale: quod erat oſtendendum.

Corollarium primum.

POTEST ſimili argumento demonſtrari ſpatium ARYHIFA, quod à dimidiâ trochoide ARH, dimidiâ circumferentiâ HIF, & dimidiâ baſi FA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHFA, quod à dimidiâ comite AVH, diametro HF, & dimidiâ baſi FA comprehenditur. Quia ſcilicet ipſa duo ſpatia ſunt in iiſdem parallelis AF, CH : & ductâ quâcunque eiſdem intermediâ parallelâ YD, oſtenſum eſt ſecundâ Propoſitione portionem YX priori ſpatio interceptam, æqualem eſſe portioni 6 D altero ſpatio comprehenſam. Quod idem quia parallelis omnibus interceptis accidit, patet ipſa ſpatia eſſe æqualia.

Corollarium ſecundum.

NEC diſſimili argumento probabitur ſpatium ARHCA, quod à dimidia trochoide ARH, rectâ HC, & rectâ CA continetur, æquale eſſe ſpatio AVHIFA, quod à dimidiâ comite AVH, ſemicircumferentiâ HIF & dimidiâ baſi FA comprehenditur; quamvis in rotâ contractâ portio quædam primi horum ſpatiorum ſit ultrà rectam AC extrà rectangulum FC; & portio quædam ſecundi ſpatii contineatur intra ſemicirculum FIH; nihilo enim minus fiet demonſtratio univerſalis, ſed propter diſtinctionem rotarum multis verbis opus erit. At veritas hujus propoſitionis multò facilius ex precedentibus elicitur in rotâ ſimplici & prolatâ. Nam quia quartâ Propoſitione oſtenſum eſt ſpatium AVHCA æquale eſſe ſpatio AVHFA; item Propoſitione ſextâ ſpatium ARHVA oſtenſum eſt æquale ſemicirculo FIH : demptis æqualibus ab æqualibus in rotâ ſimplici & contractâ, patebit Propoſitio.

Corollarium tertium.

In rotâ ſimplici quatuor hæc ſpatia ſunt æqualia ARHCA, ARHVA, AVHIFA & ſemicirculus FIH. Quia enim ſpatium comitis AVH 10 LA in rotâ ſimplici oſtenſum eſt eſſe duplum rotæ ſeu circuli FH, per Propoſitionem quartam erit dimidium ejuſdem ſpatii, ſcilicet AVHFA, duplum ſemicirculi FIH; quare dempto ſemel ipſo ſemicirculo, relinquitur ſpatium AVHIFA æquale eidem ſemicirculo. Cætera manifeſta ſunt.

Propositio Septima.

Cujuſvis trochoidis ſpatium majus eſt circulo ſibi proprio; & exceſſus mediam tenet proportionem inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Manifesta eſt Propoſitio. Nam in eâdem figura, ſpatium trochoidis ARH 25 LA æquale eſt ſpatio ſuæ comitis AVH 10 LA, ac præterea duobus ſpatiis ARHVA, & L 25 H 10 L, quorum utrumque æquale eſt ſemicirculo FIH per ſextam Propoſitionem; ideoque ambo ſimul ipſi integro circulo FIHG ſunt æqualia; ideoque ipſum trochoidis ſpatium ſuperat circulum ſibi proprium ſpatio ſuæ comitis; quod quidem per Propoſitionem quintam mediam proportionem tenet inter duplum rotæ & duplum circuli eidem trochoidi proprii.

Corollarium.

Hinc palam eſt in rotâ ſimplici ſpatium trochoidis triplum eſſe ejuſdem rotæ: quia ipſum continet circulum ſibi proprium, hoc eſt ipſam rotam ſemel, ac præterea ejus duplum, ſcilicet ſpatium ſuæ comitis.

AD TROCHOIDEM, EJUSQUE SOLIDA.

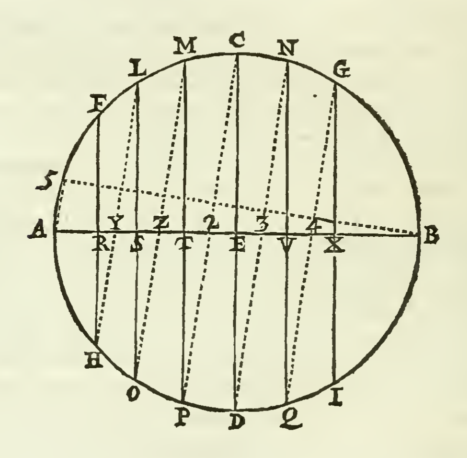
Propositio Lemmatica Prima.

Esto circulus ACBD, cujus diameter AB; atque ex ejus semicircumferentiâ ACB sumatur arcus quicunque FG, sive is sit diametro AB conterminus, sive non; dividaturque arcus ille in quotlibet partes æquales in punctis F, L, M, C, N, G, &c. indefinitè, quemadmodum in doctrinâ indivisibilium fieri consuevit; ex quibus punctis demittantur in diametrum AB totidem rectæ perpendiculares FR, LS, MT, CE, NV, GX, &c. quæ erunt totidem sinus recti numero indefiniti & secundùm arcus æquales, vel æqualiter sese excedentes sumpti. Proponitur demonstrandum,

Omnes illos sinus indefinitè sumptos ad radium circuli toties sumptum sic se habere, ut recta RX, portio scilicet diametri inter extremos sinus intercepta, ad arcum propositum FG.

Producantur enim sinus illi, donec alteri semicircumferentiæ ADB occurrant in punctis H, O, P, D, Q, I, &c. & jungantur alternatim rectæ LH, MO, CP, ND, GQ, &c, occurrentes diametro AB in punctis, Y, Z, 2, 3, 4, &c. & ductis omnium arcuum subtensis FL, LM, MC, CN; HO, OP, PD, DQ, &c. fiant triangula rectangula similia HRY, LSY, OZS,

MTZ, PT2, CE 2, &c. ac tandem ſumpto arcu A 5, qui æqualis ſit uni ex arcubus æqualibus, putà arcui FL; jungantur rectæ A 5, & B 5, ut fiat triangulum rectangulum A 5 B prædictis HRY, &c. ſimile. Itaque propter triangulorum ſimilitudinem, facile eſt colligere omnes ſubtenſas intermedias LO, MP, CD, NQ, &c. ſimul ſumptas, unà cum dimidiis extremarum, putà unà cum HR, & GX ad rectam B 5 eandem rationem ha-



bere, quam recta RX ad rectam A 5. Atqui ex doctrinâ indiviſibilium, & propter infinitam arcuum æqualium multitudinem & parvitatem, omnes prædictæ ſubtenſæ ſimul ſumptæ unà cum HR & GX, ſumi poſſunt pro duplo omnium ſinuum prædictorum indefinitè ſumptorum, dempto eorum uno; ſicuti recta B 5 pro diametro ſeu duplo radii, & recta A 5, pro arcu A 5, ſive FL. Ut ergo duplum omnium ſinuum indefinitè ſumptorum dempto

dempto uno, ad duplum radii; ita recta RX ad arcum FL; sumptisque duorum priorum terminorum dimidiis, erunt omnes sinus indefinitè sumpti, dempto uno, ad radium, ut RX ad FL. Verùm tot sunt sinus, dempto uno, quot arcus; ergò sumptis consequentium æquemultiplicibus in præcedenti proportione, erunt omnes sinus, dempto uno, ad radium toties sumptum, ut recta RX, ad omnes arcus minores; hoc est ad arcum FG. Sed in doctrina indivisibilium, unicus sinus additus ad alios numero indefinitos, nihil mutat; unde patet Propositio: quippe omnes sinus ad radium toties sumptum eandem rationem habebunt, quàm recta RX ad arcum FG.

Corollarium primum.

SI ergo arcus assumptus FG, sit semicircumferentia ipsa, ad quam pertineat diameter AB, quæ hoc casu referet rectam RX; patet omnes sinus rectos ad semicircumferentiam pertinentes atque secundùm æquales arcus indefinitè sumptos, esse ad radium toties sumptum, ut diameter ad semicircumferentiam. Hîc autem in demonstratione, quia extremi sinus evanescunt, nihil demendum erit nec addendum: in universum tamen additio aut substractio finiti alicujus determinati, in doctrinâ indivisibilium nihil mutat.

Corollarium secundum.

SI autem arcus FG sit quadrans diametro AB conterminus; tunc radius referet rectam RX; atque ita omnes sinus recti ad quadrantem pertinentes, & secundùm æquales arcus sumpti, erunt ad radium toties sumptum, ut radius ad quadrantem.

Corollarium tertium.

At si arcus FG sit quidem diametro AB conterminus, sed quadrante major aut minor; tunc recta RX erit sinus versus ipsius arcûs. Ut ergo omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus versus ad arcum.

Corollarium quartum.

Si arcus FG diametro AB non sit conterminus, idem autem ita constitutus sit, ut alterutrum punctorum R vel X sit centrum circuli, quo pacto alteruter sinuum extremorum FR vel GX erit radius; tunc recta RX æqualis erit sinui recto ejusdem arcûs: quapropter, ut omnes sinus recti ad radium toties sumptum, ita sinus rectus arcûs ad ipsum arcum.

Corollarium quintum.

In casu quarti Corollarii. Si centrum circuli sit inter puncta R, X; tunc recta RX componetur ex duobus sinibus rectis duarum portionum arcûs FG. Ut ergò se habet summa omnium sinuum rectorum ad radium toties sumptum; ita summa duorum sinuum rectorum, qui ad duas portiones arcûs FG pertinent, se habebunt ad eundem arcum.

Corollarium sextum.

In eodem casu, si centrum cadat ultrà puncta R, X; tunc recta RX erit differentia duorum sinuum rectorum, vel etiam duorum sinuum versorum, qui sinus recti vel versi pertinebunt ad duos arcus quorum diffe-

rentia erit arcus ipſe FG. Itaque, ut ſumma omnium ſinuum rectorum ad radium toties ſumptum; ita differentia illa ſinuum ad ipſum arcum FG.

Corollarium ſeptimum.

QUONIAM autem omnes ſinus recti differunt à radio toties ſumpto, per omnes ſinus verſos; ſumptis differentiis pro antecedentibus, erunt omnes ſinus verſi ad radium toties ſumptum, ut differentia inter rectam RX, & arcum FG, ad ipſum arcum FG. Undè rurſus ſex Corollaria, ſex præmiſſis reſpondentia facilè deducentur, quorum quæ ad quartum pertinebit concluſio talis erit, Ut omnes ſinus verſi ad radium toties ſumptum; ita differentia inter ſinum rectum & ipſum arcum, ad ipſum eundem arcum.

Propositio Lemmatica Secunda.

Ex prædictis facilè eſt examinandis ſinuum Tabulis perutilem hanc Propoſitionem demonſtrare.

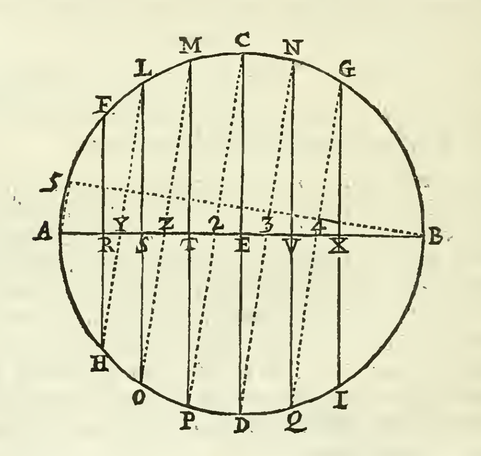
Si in circumferentiâ circuli ſumantur duo quicunque arcus FM, CG; & reliqua ponantur ut in primâ Propoſitione, omnes ſinus recti ex arcu FM demiſſi, atque indefinitè ſumpti, putà FR, LS, MT &c. ad omnes ſinus rectos ex arcu CG demiſſos atque indefinitè ſumptos, putà CE, NV, GX &c. (modò tamen ſinguli ex minoribus arcubus FL, LM, &c. æquales ſint ſingulis ex minoribus arcubus CN, NG, &c. ſive multitudo horum æqualis ſit multitudini illorum, ſive non) erunt, ut recta RT extremis ſinibus intercepta, ad rectam EX extremis ſinibus interceptam.

NAM ex prima Propoſitione, Ut omnes ſinus FR, LS, MT, &c. ad radium toties ſumptum; ita recta RT ad arcum FM. Ut autem radius ille toties ſump

tus ad eundem radium toties ſumptum, quot in majori arcu CG continentur minores, ita arcus integer FM ad arcum integrum C G : & ut radius toties ſumptus quot in arcu CG continentur minores ad totidem ſinus CE, NV, GX; ita arcus CG ad rectam EX : ergo ex æquo in quatuor terminis utrinque, Ut omnes ſinus FR, LS, MT, & ad omnes ſinus CE, NV, GX, &c. ita recta RT, ad rectam EX..

Corollarium primum.

Hinc licet Tabulas ſinuum per quoſcunque arcus commenſurabiles examinare hâc ratione. Eſto ar-



cus FM triginta graduum, arcus vero CG quadraginta graduum; ſintque in utroque arcu dati extremi ſinus ex Tabulis, putà FR, MT, CE, GX; tum reliqui inter-

medii per ſingula minuta prima, vel etiam ſecunda, ſi libuerit : unde ex iiſdem Tabulis dabuntur etiam rectæ RT, EX. Quoniam ergò numerus ſinuum utrinque finitus eſt atque determinatus, ex ſummâ omnium priorum ſinuum FR, LS, MT, &c. dematur dimidium extremorum FR, MT; tum ex ſummâ poſteriorum CE, NV, GX, &c. dematur dimidium extremorum CE, GX; eritque tunc reſiduum priorum ad reſiduum poſteriorum, ut recta RT, ad rectam EX; quod niſi ita reperiatur, erroneæ erunt Tabulæ. Erit tamen error ferendus, donec exceſſus aut defectus minor erit dimidio illius numeri qui exprimit multitudinem omnium ſinuum in utroque arcu contentorum.

Corollarium ſecundum.

Quod ſi proponatur arcus FG, ita dividendus in duos arcus FM, MG, ut demiſſis ſinubus rectis FR, LS, &c. quemadmodum ſupra, ſumma omnium ſinuum indefinitè ſumptorum qui ad arcum FM pertinebunt, ad ſummam omnium qui ad arcum MG pertinebunt, rationem habeant datam; dividenda erit recta RX in ratione datâ, putà in puncto T, atque ab eo excitanda perpendicularis TM uſque ad circumferentiam; & factum erit, ut patet ex præmiſsâ ſecunda Propoſitione.

Hîc multa theoremata & problemata præmiſſis ſimilia proponi poſſent, quæ, quia facilia ſunt nihilque ad noſtrum inſtitutum conducunt, conſultò omittimus.

Ad primum, ſequens notandum.

In figurâ rotæ atque trochoidis ſequentis, ut pateat trilineum AMHG æquale eſſe quadrato ſemidiametri rotæ AG, adverte rectam GH quadranti circum-

ferentiæ æqualem esse quæ recta GH, si in quotcunque partes æquales indefinitè secetur, & à singulis sectionis punctis excitentur perpendiculares usque ad curvam AMH, exhibebunt ipsæ perpendiculares omnes sinus rectos quadrantis diametro contermini secundùm æquales arcus sumptos, ex naturâ trochoidis ejusdemque sociæ: quare per secundum Corollarium Propositionis primæ præmissæ, erunt illi omnes sinus simul sumpti ad radium AG toties sumptum, ut radius AG ad quadrantem GH. Ut autem summa illorum sinuum ad summam radiorum, ita trilineum AMHG ad rectangulum AH, ex doctrinâ indivisibilium; & ut radius AG ad quadrantem GH, ita quadratum ipsius AG ad rectangulum AH; ideoque ut trilineum AMHG ad rectangulum AH, ita quadratum AG ad idem rectangulum AH; unde trilineum ipsum AMHG æquale est quadrato semidiametri AG.

Quoniam autem trilineum reliquum AMHV est differentia inter trilineum AMHG & rectangulum AH; illud ergo AMHV æquale erit differentiæ inter quadratum AG & rectangulum AH; hoc est rectangulo contento sub semidiametro AG & differentiâ inter ipsam AG & quadrantem GH.

Ad secundum, sequens notandum.

Bilineum AMHZA est manifestò differentia inter triangulum AGHZA sive quadrantem rotæ, & trilineum AMHG sive quadratum semidiametri AG.

De Rotâ simplici quædam notanda.

I. Quod sub semidiametro rotæ & quadrante itineris centri ejusdem comprehenditur rectangulum, à sociâ trochoidis sic dividitur, ut portio ma-

jor æqualis ſit quadrato ſemidiametri rotæ; altera autem portio, eademque minor æqualis ſit rectangulo contento ſub ſemidiametro rotæ & differentiâ quæ eſt inter eandem ſemidiametrum & quadrantem circumferentiæ ipſius rotæ.

II. Quod à quartâ parte ſociæ trochoidis & à rectâ quæ quartæ ipſius extrema conjungit clauditur ſpatium bilineum, æquale eſt differentiæ inter quadrantem rotæ & quadratum ſemidiametri ejuſdem.

III. Propoſitâ trochoide ejuſque ſociâ, atque utriuſque plano circa communem baſim circumvoluto, fit ſolidum trochoidis circa baſim, quod quidem ad cylindrum cui inſcribitur hâc ratione comparabitur.

Portio ſolidi comprehenſa inter duas ſuperficies, quarum altera à trochoide, altera ab ejus ſociâ deſcribitur, æqualis eſt cylindro cujus baſis ſit rota ipſa, altitudo autem æqualis circumferentiæ ipſius rotæ; quoniam idem æquale eſt annulo ſtricto ejuſdem rotæ; ac proinde portio illa, totius cylindri circumſcripti quarta pars eſt.

Portio ſolidi quæ unicâ ſuperficie continetur, ſcilicet eâ quæ à ſociâ trochoidis deſcribitur, commodè conferri poteſt cum cylindro cujus axis ſit idem cum axe ſolidi trochoidis; ſemidiameter verò baſis ſit ſemidiameter rotæ: reperietur autem talis portio aquari tali cylindro, ac prætereà quadruplo illi ſolido quod fit ex converſione majoris illius trilinei, quod primo notando diximus æquari quadrati ſemidiametri rotæ, ſi ſcilicet tale trilineum circa iter centri rotæ convertatur. At ultimus hic cylindrus totius cylindri circumſcripti quarta pars eſt; ſolidum autem ex converſione trilinei, ejuſdem totius trigeſima ſecunda pars evadit; quia omnia quadrata ipſius trilinei æqualia ſunt omnibus quadratis omnium ſinuum rectorum quadrantis rotæ ſecundum æquales arcus ſumptorum, quæ omnia quadrata quadrati ſemidiametri toties ſumpti dimidia ſunt; & hoc

quadratum ſemidiametri toties ſumptum eſt decima ſexta pars omnium quadratorum parallelogrammi circumſcripti circa trochoidem : hoc ergo ſolidum quater ſumptum octavam totius cylindri circumſcripti partem conſtituit : tandem ergò ſequitur totum ſolidum trochoidis circa baſim totius cylindri circumſcripti quinque octavas partes conſtituere $\frac{5}{8}$.

Vel aliter hoc idem ſolidum quod à trochoidis ſociâ circa ejuſdem baſim circumvolutâ deſcribitur, ad totum cylindrum ſic comparabitur. Quoniam planum, ex cujus converſione circa baſim trochoidis fit tale ſolidum, ad rectangulum ipſi circumſcriptum, ex cujus converſione ſit totus cylindrus ſe habet ut ſumma omnium ſinuum verſorum ſecundùm æquales arcus ſumptorum, ad diametrum toties ſumptum; erit ſolidum ad cylindrum, ut ſumma omnium quadratorum ab omnibus ſinibus verſis ſecundùm æquales arcus ſumptis, ad quadratum diametri toties ſumptum. At hæc ratio eſt ut 3 ad 8, & additâ quartâ parte totius cylindri, hoc eſt annulo ſtricto de quo ſupra; fit ut totum ſolidum trochoidis circa baſim totius cylindri circumſcripti quinque octavas partes conſtituat, ut priùs.

Et quidem ejuſmodi ratio $\frac{5}{8}$ de quâ jam egimus, geometricè vera eſt, ac prorsùs accurata. At circa ſolidum quod fit ex converſione trochoidis circa axem, eadem certitudo non contingit, nec poteſt, niſi inventa fuerit ratio diametri rotæ ad ejus circumferentiam.

Neque etiam movemur quod Evangeliſta Torricellius aſſerat tale ſolidum ad ſuum cylindrum (qui ſcilicet altitudinem habeat axem trochoidis, at diametrum baſis baſim ejuſdem trochoidis) rationem eandem habere quam undecim ad octodecim; hæc enim ratio $\frac{11}{18}$ minor eſt quàm vera.

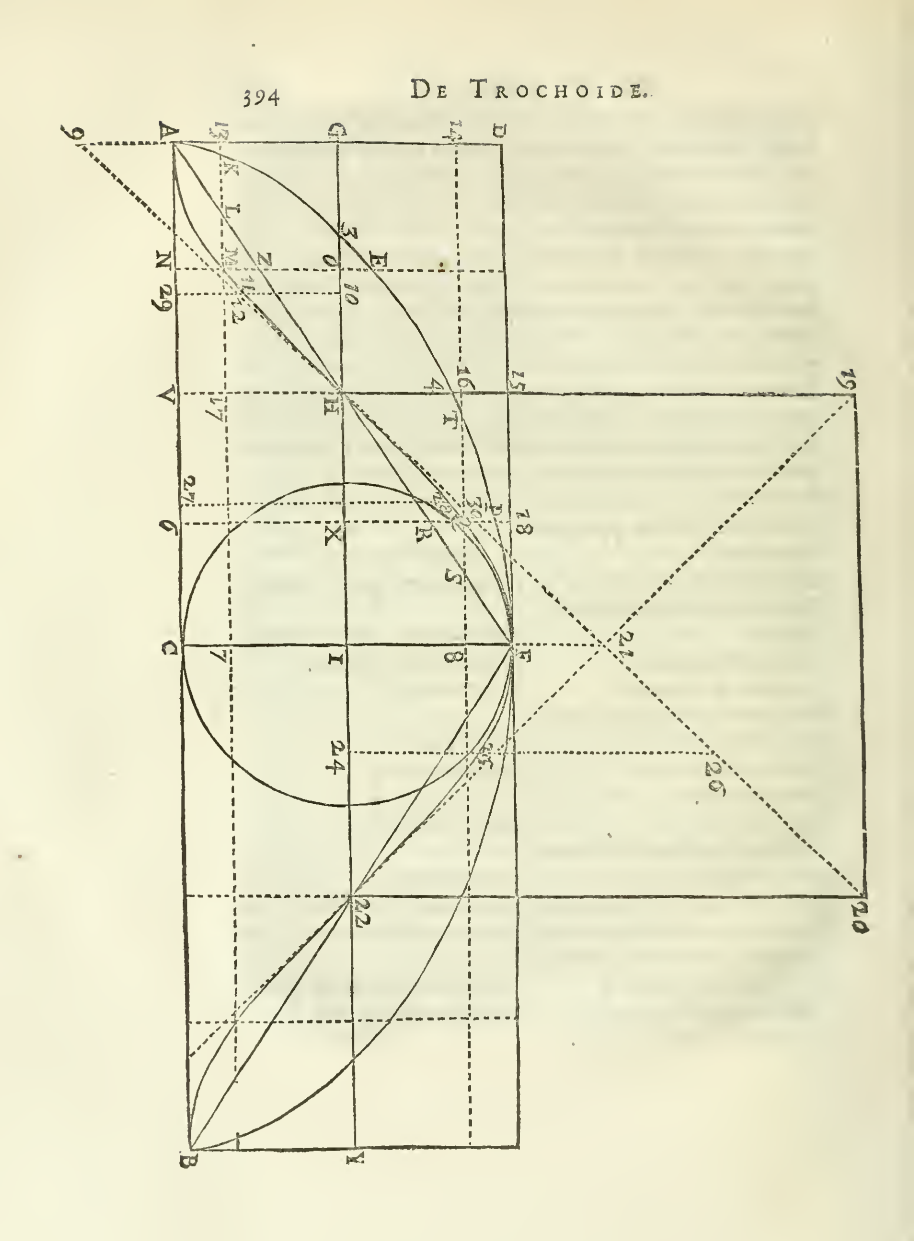
Ad hoc autem admittatur rursùs ſocia trochoidis, cujus

cujus beneficio solidum trochoidis dividetur in alia duo solida. Primum duabus superficiebus curvis continebitur, eâ scilicet quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus sociâ describitur. Secundum vero, circulo basis & eâ superficie curva terminabitur, quæ à sociâ trochoidis describetur. Ratione autem initâ secundùm Geomtriæ regulas, primum solidum continebit quartam partem totius cylindri, ac præterea sphæram rotæ, quæ ad ipsum cylindrum se habet ut sexta pars quadrati diametri ad quadratum semicircumferentiæ : secundum autem solidum continebit ejusdem totius cylindri partem quartam, ac præterea portionem quandam quæ juncta sphæræ rotæ ad totum cylindrum se habebit, ut differentia inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum ipsius semicircumferentiæ.

Ponatur radius partium æqualium	3000000	
Erit semicircumferentia	9424778	paulo major.
Quadratum semicircumferentiæ	8882643960	paulo minus.
$\frac{1}{4}$ ejusdem quadrati	2220660990	minus.
$\frac{4}{3}$ quadrati diametri	4800000000	
Differentia hujus & quadrati semicircumf.	4082643960	
$\frac{1}{4}$ hujus differentiæ	1020660990	}
Semiquadratum semicircumferentiæ	4441321980	}
Summa duorum ultimorum numerorum	5461982970	

Erit numerator rationis solidi ad totum cylindrum, cujus denominator quadratum semicircumferentiæ.

Ratio Torricellii quadrati semicircumferentiæ	5428282420 $\frac{11}{18}$ seu $\frac{44}{72}$	
ejusdem quadrati	5551652475 $\frac{5}{8}$ seu $\frac{45}{72}$	


A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
R
S
T
V
X
Y
Z
7
8
10
13
14
15
16
19
20
21
22
24
26
29

Patet ergo rationem majorem esse eâ quæ à Torricellio assignatur; minorem tamen eâ quæ suprà assignata est pro solido circa basim, quæ est $\frac{5}{8}$.

AK3E4TPFB est trochoides : AMHQFB est ejusdem trochoidis socia : G3OHXIY est iter centri : C718F est axis : ANV6CB est basis : F vertex : DB parallelogrammum circumscriptum; & ductæ sunt rectæ ALZHRSF, & BF : item ductæ sunt quæcunque rectæ NMZOE, VH4, & PQRX 6 axi parallelæ; ac tandem quæcunque rectæ 13 KLM7, & 14TQS8 parallelæ basi.

Itaque pro solido circa basim, patet illud esse ad cylindrum circumscriptum, ut omnia quadrata NE, V4, 6P, CF, &c. in infinitum, ad totidem quadrata CF. Verum quadratum NE æquale est quadratis NM, ME, & duplo rectangulo NME; sicuti quadratum V4 æquale est quadratis VH, H 4, & duplo rectangulo VH4; & quadratum 6P æquale est quadratis 6Q, QP, & duplo rectangulo 6QP, & sic de reliquis. Ex illis autem, quadrata NM, VH, 6Q, CF & similia, sunt quadrata omnium sinuum versorum secundùm æquales arcus sumptorum, quæ simul constituunt $\frac{3}{8}$ quadratorum diametri CF, & eadem constituunt rationem solidi sociæ trochoidis ad cylindrum: hæc ergo ratio est $\frac{3}{8}$. Reliqua quadrata ME, H4, QP, &c. unâ cum duplis rectangulis NME, VH4, 6QP, &c. ad quadrata CF collata efficiunt rationem quam habet ad eundem cylindrum duplus annulus qui fit ex figurâ AMHQFP4EA circa basim AB circumvolutâ, qui duplus annulus æqualis est annulo rotæ circa basim AB circumvolutæ, hoc est cylindro cujus basis sit rota, altitudo autem circumferentia rotæ, sive basis AB, qui cylindrus constituit $\frac{2}{8}$ totius cylindri. Quare solidum rotæ ad totum cylindrum constituit rationem $\frac{5}{8}$.

Aliter pro ſolido quod fit à trochoidis ſociâ. Omnia quadrata NM, ab A uſque ad VH æqualia ſunt omnibus quadratis NO, OM, minùs omnibus duplis rectangulis NOM. Item ab VH uſque ad CF omnia quadrata 6 Q æqualia ſunt omnibus quadratis 6 X, XQ, plus omnibus duplis rectangulis 6 X Q: verum hæc dupla rectangula 6 XQ æqualia ſunt illis NOM, omnia ſcilicet omnibus; exiſtentibus ergo contrariis ſignis plùs & minùs, elidunt ſe invicem hæc & illa dupla rectangula, remanentque omnia quadrata NM, 6 Q, æqualia omnibus NO, OM, 6 X, XQ: horum autem NO, 6 X, ſunt quadrata ſemidiametri, quæ conſtituunt quartam partem quadratorum totius diametri CF, ſive $\frac{2}{8}$. At quadrata OM, XQ, ſunt quadrata omnium ſinuum rectorum ſecundùm æquales arcus ſumptorum, quæ ideò conſtituunt dimidiam partem omnium qnadratorum ſemidiametri, ſive octavam partem quadratorum totius diametri. Patet ergo omnia quadrata NM, 6 Q, conſtituere $\frac{2}{8}$ & $\frac{1}{8}$, hoc eſt $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum totius diamerri CF, quæ eadem eſt ratio ſolidi quod fit à ſociâ trochoidis, ad cylindrum eidem circumſcriptum; putà ratio omnium quadratorum NM, 6 Q ad omnia quadrata CF.

Pro ſolido autem circa axem CF, admiſsâ rursùs ſociâ trochoidis in eâdem figurâ, manifeſtum eſt illud dividi in alia duo ſolida, quorum alterum inſtar annuli ſtricti terminatur duabus ſuperficiebus, eâ nempe quæ à trochoide, & eâ quæ ab ejus ſociâ deſcribitur: alterum autem ſolidum duabus etiam ſuperficiebus comprehenditur; eâ nempe quæ à ſociâ trochoidis gignitur, & eo circulo cujus ſemidiameter eſt recta CA.

Ac primum quidem ſolidum ad totum cylindrum collatum, eam habet rationem quam omnia ſimul quadrata MK, H 3, QT, & ſimilia, unà cum omnibus duplis

rectangulis 7MK, IH3, 8QT, & similibus, ad quadratum AC toties sumptum. At dupla illa rectangula æquivalent semel omnibus rectangulis sub 7 13 sive CA & MK; sub IG sive CA & H 3; sub 8 14 sive CA & QT; (propterea quod omnes rectæ 7M, IH, 8Q, &c. bis sumptæ æquivalent omnibus rectis 7 13, IG, 8 14, &c. semel sumptis, hoc est rectæ CA toties sumptæ) & hæc rectangula constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, sicuti omnes rectæ MK, H 3, QT, constituunt $\frac{1}{4}$ rectæ CA toties sumptæ. Omnia autem quadrata MK, H 3, QT, &c. ad quadratum CA toties sumptum eandem rationem habent quam sphæra rotæ ad totum cylindrum, hoc est, quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri rotæ ad quadratum CA, sive quam $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI seu AMHG quadrato IF seu IC æqualis, ad quadratum CA. Patet itaque primum solidum continere quartam partem totius cylindri, ac præterea portionem aliquam quæ ad ipsum totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ.

Jam ad secundum solidum. Manifestum quidem est illud ad totum cylindrum sic se habere ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum. Hæc autem ratio ut detegatur, adverte omnia illa quadrata æqualia esse omnibus quadratis DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quia singula singulis æqualia sunt ex natura trochoidis. Itaque si hæc & illa quadrata simul cum quadrato AC toties sumpto conferantur, res expedietur. Vide aliam demonstrationem secundi hujus solidi in Appendice quæ postea sequetur.

At hoc jam confectum est in universum in omni parallelogrammo quale est ACFD, ductâ primò utcunque lineâ qualis est socia AMHQF constituente duo trilinea primæ divisionis AHFC, & FHAD : tum ductâ

ſecundò rectâ VH 4 15, quæ & latera AC, DF, & parallelogrammum ſimul bifariam dividat, ſecetque lineam ipſam AMHQF utcunque in H, ita ut conſtituantur duo trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, & HQF 15, & duo reliqua quadtilinea; ſi inſuper intelligamus rectam AC dividi tertiò in quotcunque partes æquales in infinitum, ex doctrinâ indiviſibilium, & per puncta diviſionis ductas eſſe rectas ipſi CF parallelas, quæ parallogrammum dividant in totidem partes æquales, ſed & lineam AMHQF in totidem punctis: conſtituent ergo ipſæ rectæ intra trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, HQF 15, multa alia minora trilinea tertiæ diviſionis; tot ſcilicet intra ſingula quot partes æquales in ſingulis rectis AV, F 15, continentur. Puta ſi rectâ AV tertiâ diviſione in 1000 partes æquales dividatur, conſtituentur 1000 trilinea tertiæ diviſionis quorum maximum erit ipſum AMHV; & omnia communem habebunt apicem A; ac minimum quidem trilineum aſſumet ex rectâ AV primam partem ad A terminatam; ſequens autem aſſumet duas priores partes ad idem A terminatas; tertium tres; quartum quatuor, & ſic eodem ordine uſque ad maximum; eritque forſan unum ex intermediis AMN. Sic intra trilineum HQF 15 totidem conſtituentur minora trilinea tertiæ diviſionis quorum unum ex intermediis erit forſan F 18 Q. Præterea ex rectis CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quædam portiones intra prædicta trilinea ſecundæ diviſionis continentur: putà intra AMHV; portiones AV, M 17, &c. intra HQF 15 verò, portiones F 15, Q 16, &c. atque ex doctrinâ indiviſibilium demonſtratur horum omnium portionum quadrata ſimul ſumpta dupla eſſe omnium prædictorum trilineorum tertiæ diviſionis ſimul ſumptorum.

Hoc poſito, illud inquam jam confectum eſt ex doctrinâ indiviſibilium, diviſo triplici diviſione quovis

parallelogrammo CD, ut dictum est, sive prima divisio fiat in partes æquales, ut hîc, sive non; omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea A H F C, & FHAD primæ divisionis pertinent, constituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea secundæ divisionis A M H V, & HQF 15; hoc est quadruplum omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis, quæ in iisdem AMHV, H-QF 15 comprehenduntur, ut suprà. Omnia enim quadrata omnium portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. simul sumpta dupla sunt omnium minorum trilineorum tertiæ divisionis quæ in ipsis AMHV, HQF 15 comprehenduntur: hoc autem ex doctrina indivisibilium demonstramus in secunda Propositione Appendicis quæ posteà sequetur. Et hoc quidem in universum in omni parallelogrammo: at hîc in specie trilinea quidem AH-FC, & F H A D primæ divisionis æqualia sunt; sicuti æqualia sunt quoque AMHV, & HQF 15 secundæ divisionis: quare sumptis tantùm AHFC, & AMHV quæ constituunt dimidiam partem omnium quatuor; tunc quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. quæ pertinent ad secundum solidum de quo agitur, constituunt quartam partem quadrati CA toties sumpti, ac præterea quadruplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in trilineo AMHV comprehensorum.

Si itaque hæc quarta pars cum eâ quartâ quæ ex primo solido inventa est, conjungatur, habebimus solidum rotæ constituere dimidium sui cylindri, ac præterea duas portiones, quarum altera ad eundem cylindrum sic se habet ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG ad quadratum AC, ut suprà: altera autem ad eundem cylindrum sic se habet ut qua-

druplum omnium trilineorum tertiæ divisionis in AMHV comprehensorum, ad idem quadratum AC toties sumptum quot sunt rectæ CA, 7M, IH, 8Q, &c.

Superest ergò ut ostendamus duas illas portiones simul junctas, ad totum cylindrum eandem rationem habere, quam differentiam inter quadratum quadrantis circumferentiæ & $\frac{4}{3}$ quadrati radii, ad quadratum semicircumferentiæ: & quidem de $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG nulla erit difficultas; de quadruplo autem trilineorum, sic patebit.

Producatur recta DGA versus A usque in 9, ita ut recta G9, sit æqualis rectæ GH, hoc est quadranti circumferentiæ rotæ; & jungatur recta 9H, hæc cadet extra trilineum AMHG, & cum curvâ AMH constituet ad punctum H angulum minorem omni angulo rectilineo, etiamsi producta secet eandem curvam AHMQF in ipso puncto H, in quo, tali sectione, constituentur duo anguli ad verticem oppositi æquales, ac singuli minores quovis angulo rectilineo; quod tamen hic parum refert: sufficit enim quod recta 9H cadat extra trilineum AMHG; hoc autem sic ostendimus.

In ipsâ 9H sumatur quodvis punctum 12 ex quo ducatur recta 12 10 parallela ipsi AG atque occurens rectæ GH in puncto 10, curvæ autem AMH occurrat ipsa 12 10 producta, si opus sit, in puncto 11; itaque recta 10 12 æqualis est rectæ 10 H, recta autem 10 H æqualis est arcui cuidam quandrante minori, cujus sinus rectus erit recta 10 11 ex naturâ sociæ trochoidis; quare 10 11 minor est quàm 10 H sive quàm 10 12: unde punctum 12 est extra trilineum AMHG, quod idem de omnibus punctis rectæ 9H ostendetur. Quoniam autem trilineum HQF 15 secundæ divisionis, & omnia minora trilinea tertiæ divisionis in eo contenta, trilineo AMHU secundæ divisionis, & omnibus trilineis

neis tertiæ divisionis in eo contentis singula singulis ordine sumptis, æqualia sunt : quod de his ostendetur, de illis quoque verum erit.

Sumatur ergo QF 18 trilineum quodvis tertiæ divisionis assumens ex rectâ F 15, rectam F 18 quotcunque partium æqualium ex iis in quas divisæ sunt rectæ CA, FD ; tum rectæ F 18 sumatur æqualis ex HG recta H 10, ducaturque recta 10 11 12, ut supra. Est igitur F 18, sive H 10, sive 10 12 æqualis cuidam arcui cujus sinus versus est 18 Q; sinus autem rectus est 10 11, ex naturâ sociæ trochoidis; quare recta 11 12 est differentia inter arcum & ejusdem arcûs sinum rectum : & trilineum quidem QF 18 ad parallelogrammum FX sic se habet, ut omnes sinus versi omnium arcuum æqualium minorum tertiæ divisionis in arcu F 18 contentorum, ad radium IF toties sumptum, quot in arcu F 18 continentur arcus minores ejusdem tertiæ divisionis, ex doctrinâ indivisibilium. Ut autem omnes illi sinus versi ad omnes illos radios, ita recta 11 12 differentia arcus F 18 & sui sinus recti, ad arcum F 18, ex Corollario septimo Propositionis præmissæ : quia recta F 18 refert arcum, cujus sinus rectus est 10 11, & differentia inter hunc sinum & ipsum arcum F 18, sive 10 12, est 11 12; atque insuper alter sinuum ab extremitatibus arcûs F 18 cadentium, puta sinus FI cadit in centrum : quare trilineum QF 18 est ad parallelogrammum FX, ut recta 11 12 ad rectam F 18; sed parallelogrammum FX ad parallelogrammum FH se habet ut recta F 18 ad rectam F 15 : quare ex æquo, ut trilineum QF 18 ad parallelogrammum FH, ita recta 11 12 ad quadrantem F 15 sive GH.

Cùm ergo idem de singulis trilineis tertiæ divisionis verum sit, quod de QF 18 jam demonstratum est; sequitur omnia illa trilinea simul sumpta ad parallogram-

mum FH toties ſumptum ſic ſe habere, ut omnes diſferentiæ inter omnes ſinus rectos ſecundum æquales arcus ſumptos, & ſuos arcus, ad quadrantem G 9 toties ſumptum. Ut autem hæ omnes differentiæ ad omnes quadrantes, ita trilineum AMH9, quod differentias illas omnes continet, ad quadratum quadrantis G 9, quod omnes illos quadrantes continet, ex doctrinâ indiviſibilium: quare argumentis ex arte inſtitutis quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in trilineo HQF 15, ſive in trilineo AMHV contentorum, erit ad octuplum parallelogrammi FH toties ſumpti quot ſunt trilinea in AMHV, ut duplum trilinei AMH 9 ad quadruplum quadrati quadrantis G9, ſive ut duplum trilinei ipſius AMH 9 ad quadratum ſemicircumferentiæ AC. At octuplum prædictum æquale eſt omnibus quadratis CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ex doctrina indiviſibilium; quia tam ex octuplo illo, quàm ex omnibus his quadrâtis, conſtituitur idem ſolidum parallelepipedum, illud nempe quod baſim habet parallelogrammum AF, altitudinem autem rectam AC: ſive, quod idem eſt, quod baſim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF.

Itaque quadruplum omnium trilineorum tertiæ diviſionis in trilineo AMHV contentorum, ad omnia quadrata CA, 7 13, IG, 8 14, &c. ſic ſe habet, ut duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC. Ut autem quadruplum illud ad omnia quadrata ſemicircumferentiarum, ita erat una ex duabus portionibus reliquis ſolidi rotæ, ad totum cylindrum. Ut ergo talis portio ad cylindrum, ita duplum trilinei AMH9 ad quadratum AC; ſed & altera portio erat ad eundem totum cylindrum ut $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH 9 ad quadratum AC; ſed $\frac{2}{3}$ trilinei AMHG unà cum duplo trilinei AMH9 ſimul differunt à quadrato quadrantis G9

tanto ſpatio quantum eſt $\frac{4}{3}$ ipſius trilinei AMHG; (patet, ex eo quod triangulum HG9 ſit dimidium ipſius quadrati G9.) Conſtat ergo propoſitum, nempe duas illas portiones reliquas ad totum cylindrum ſic ſe habere, ut differentia inter quadratum quadrantis & $\frac{4}{3}$ trilinei AMHG, quod quadrato radii æquale eſt, ad quadratum ſemicircumferentiæ.

Nota.

EX iis quæ expoſita ſunt de rotâ ſimplici, atque ſolidis quæ ab illius trochoide gignuntur, non difficile erit rotas alias tam prolatas quàm contractas contemplari: eadem enim in illis quàm in ſimplici valebit methodus, eademque vigebunt argumenta, ſed concluſiones erunt diverſæ propter diverſas rationes altitudinis cujuſcumque trochoidis ad ſuam baſim. Nos tamen iis præmiſſis nec abſolutis, ſed rudi tantum minervâ exaratis ne memoriâ exciderent, ſuperſedebimus, donec operi extremam manum imponere per tempus licebit. Tunc autem & centra gravitatis tam plani trochoidis, quàm ejus ſociæ, examini ſubjicientur, ac detegentur.

APPENDIX

Ad ſolidum trochoidis circa axem converſæ, continens aliam demonſtrationem ſecundi ſolidi duorum illorum ex quibus totum componitur, putà illius quod à ſociâ circa axem converſa deſcribitur.

AD hoc autem præmiſſis duabus Propoſitionibus Lemmaticis, illarumque Corollariis, accedant quæ ſequuntur.

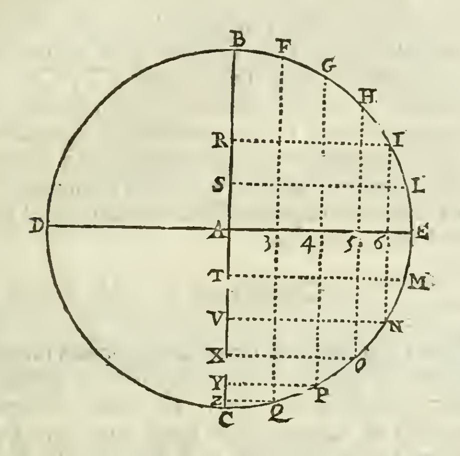
Corollario quidem septimo præcedenti demonstratum est in arcubus quadrante non majoribus, sic esse omnes sinus versos ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum & ipsius arcum ad ipsum eundem arcum. Hîc verò demonstrabimus idem quoque verum esse de arcubus quadrante majoribus.

PROPOSITIO PRIMA.

Esto circulus cujus centrum A, diametri BC, DE ad rectos angulos sese secantes, ita ut BEC sit semicircumferentia divisa in duos quadrantes BE, CE, qui in quotlibet arcus æquales indefinitè dividantur in punctis B, F, G, H, I, L, E, M, N, O, P, Q, C, &c. atque sumatur arcus quivis IEC quadrante major, & à punctis divisionis illius demittantur in diametrum BC perpendiculares IR, LS, EA, MT, NV, OX, PY, QZ, &c. ut habeantur omnes sinus versi CZ, CY, CX, CV, CT, CA, CS, CR, &c. ad arcum IC pertinentes: sinus autem rectus arcûs IEC erit IR. Dico ergò sic esse omnes illos sinus versos ad radium AB toties sumptum, ut differentia inter sinum RI & suum arcum IEC ad ipsum eundem arcum.

DEMITTANTUR in diametrum DE sinus recti F3, G4, H5, I6, &c. qui pertinent ad divisiones arcus BI quadrante minoris ac semicircumferentiam perficientis. Itaque ex quarto Corollario, ut omnes sinus recti BA, F3, G4, H5, I6, &c. ad radium toties sumptum, ita sinus IR ad arcum IB. Ut autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IB, ad ipsum radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in arcu IC, ita arcus IB ad ipsum arcum IC: ergo ex æquo in tribus terminis, ut summa sinuum

BA, F 3, G 4, H 5, I 6, &c. ad radium toties ſumptum quot ſunt puncta diviſionum in arcu IC, ita ſinus IR ad arcum IC; & ſumptis differentiis pro antecedentibus, ut differentia inter ſummam ſinuum rectorum BA,



F 3, G 4, H 5, I 6, &c. radium toties ſumptum quot ſunt puncta diviſionum in arcu IC, ad ipſum radium toties ſumptum; ita differentia inter ſinum rectum IR & ſuum arcum majorem IC, ad ipſum eundem arcum. Verùm differentia illa ſummæ ſinuum & ſummæ radiorum æqualis eſt ſummæ ſinuum verſorum prædictorum, ut ſtatim demonſtrabimus: itaque conſtat Propoſitio.

Lemma.

Quod autem aſſumptum eſt, hoc ita demonſtratur. Ex quadrante EC ſumatur arcus NC æqualis arcui IB, & demittantur in diametrum DE ſinus recti

Q3, P4, O5, N6, &c. qui æquales erunt ipsis F3, G4, H5, I6, &c. illis autem ex radio AC toties demptis, remanent manifestò sinus versi CZ, CY, CX, CV: superest autem radius toties sumptus quot sunt puncta divisionum in arcu IN; sed hic perficit sinus versos reliquos CT, CA, CS, CR: nam radius bis sumptus perficit duos sinus versos CV, CR; & idem radius rursus bis sumptus perficit duos sinus versos CT, CS; sinus autem versus CA est idem radius. Reliqua patent. Nec aliquem moveat quod idem sinus versus CV bis assumptus est: ille enim cùm sit magnitudo quædam determinata, semel tantum, plusquàm par est, sumpta, atque indefinitis numero magnitudinibus addita, nihil officit in doctrinâ indivisibilium.

Corollarium.

QUONIAM ergo in omni arcu, omnes sinus versi sunt ad radium toties sumptum, ut differentia inter sinum rectum ipsius arcus, & arcum eundem ad ipsum arcum; ut autem radius toties sumptus ad eundem radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ: ita arcus propositus ad ipsam semicircumferentiam. Patet ex æquo in tribus terminis omnes sinus versos arcûs propositi, ad radium toties sumptum quot sunt puncta divisionum in totâ semicircumferentiâ, eandem rationem habere, quam differentia inter sinum rectum arcûs propositi & ipsum arcum, ad integram semicircumferentiam.

PROPOSITIO SECUNDA.

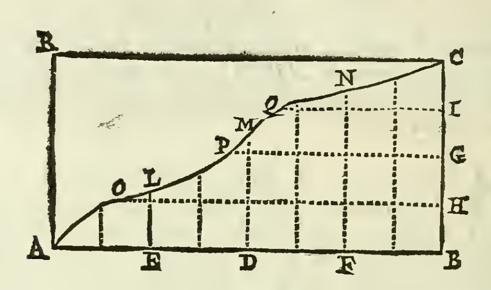
Esto trilineum quodcunque ABC, cujus duo ex lateribus puta AB, BC, sint lineæ rectæ, tertium verò AC utcunque rectum vel curvum; modo ipsum tale sit ut procedendo secundum ipsum à puncto A ad punctum C, idem fiat continuò propius ac propius rectæ BC; remotius autem ac remotius à rectâ AB: ut sic nec recta AB, nec BC, nec quævis iisdem parallela, ipsi lineæ AC duobus in punctis occurrere possit. Perficiatur autem parallelogrammum ABCR; atque intelligatur converti tam parallelogrammum quàm trilineum circa unum latus, putà BC.

MANIFESTUM est à parallelogrammo describi vel cylindrum, vel cylindraceum cylindro æqualem; à trilineo autem solidum quoddam: atque si latus ipsum BC dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis H, G, I, &c. per quæ ducantur rectæ HO, GP, IQ, &c. ipsi AB parallelæ atque latere AC trilinei terminatæ, manifestum est quoque solidum trilinei ad cylindrum sic se habere ut omnia quadrata rectarum BA, HO, GP, IQ, &c. ad trilineum pertinentium, ad quadratum BA toties sumptum. Ut autem in quâvis tali figurâ horum solidorum comparatio rectè institui possit, proderit sæpissimè hoc elementum ex doctrinâ indivisibilium annotasse.

Alterum latus rectum AB dividatur in quotcunque partes æquales indefinitè in punctis E, D, F, &c. quæ quidem partes singulæ æquales sint singulis BH, HG, &c. ducanturque totidem rectæ EL, DM, FN, &c. lateri BC parellelæ atque latere AC trilinei terminatæ, quæ quidem trilineum ipsum divident, constituentque intra

illud alia trilinea numero indefinita atque ad communem verticem A conſtituta, putà AEL, ADM, AFN, ABC, &c.

Nec eſt quod quis dicat rectas AB, BC longitudine poſſe eſſe incommenſurabiles; atque ita non poſſe partes unius æquales eſſe partibus alterius: nam præterquamquod in diviſione indefinitâ hæc objectio locum non habet; illud præterea manifeſtum eſt, poſſe in utrâque



partes omnes eſſe æquales, præter extremam quandam portionem alterius illarum; quæ quidem erit definita quædam portio, quâ additâ aut detractâ, vel additis aut detractis, quæ ab illâ dependent magnitudinibus omninò definitis, nullo modo mutatur indefinitarum ratio, ex doctrinâ indiviſibilium.

Dico ergo omnia hæc trilinea in trilineo ABC conſtituta, ſimul ſumpta omnium quadratorum BA, HO, GP, IQ, &c. ſimul ſumptorum dimidiam partem conſtituere. Intelligatur enim ipſa omnia quadrata erecta ſuper plano trilinei; quo pacto ex doctrinâ indiviſibilium illa conſtituent ſolidum quoddam quinque figuris comprehenſum, quarum prima erit ipſum trilineum; ſecunda

ſecunda eſt trilineum cujus baſis ipſi rectæ AB parellela eſt & oppoſita, & vertex punctum ipſum C; tertia autem erit quadratum ſuper rectâ BA erectum; quarta ſuper rectâ BC erecta, erit trilineum ipſi ABC ſimile & æquale; quinta tandem ſuper lineâ AC erecta, erit utcunque plana vel curva, prout ipſa AC recta erit vel curva. Intelligatur quoque planum quoddam ſecans planum trilinei ABC ſecundùm rectam BC, atque ad idem inclinatum ſecundùm angulum ſemirectum versùs A: hoc ergo planum ſic inclinatum dividet bifariam omnia & ſingula quadrata erecta ut ſuprà; unde & idem planum dividet quoque bifariam ſolidum ex illis quadratis conſtans, eruntque partes duo ſolida inſtar pyramidum, ſingula quatuor ſuperficiebus contenta: horum quod præcipuè nobis utile eſt, baſim habet trilineum ABC, tres autem reliquæ ſuperficies illius ſunt, triangulum ſuper rectâ AB erectum & dimidium quadrati conſtituens; figura ſuprà lineâ AC erecta; ac figura ea quæ ex plano inclinato ſecante conſtituitur: tale autem ſolidum manifeſto conſtat ex dimidiis omnium quadratorum erectorum, ex doctrinâ indiviſibilium; eſtque vertex illius punctum extremum lateris illius quadrati, quod quidem latus ex puncto A erigitur, ipſique perpendiculariter imminet.

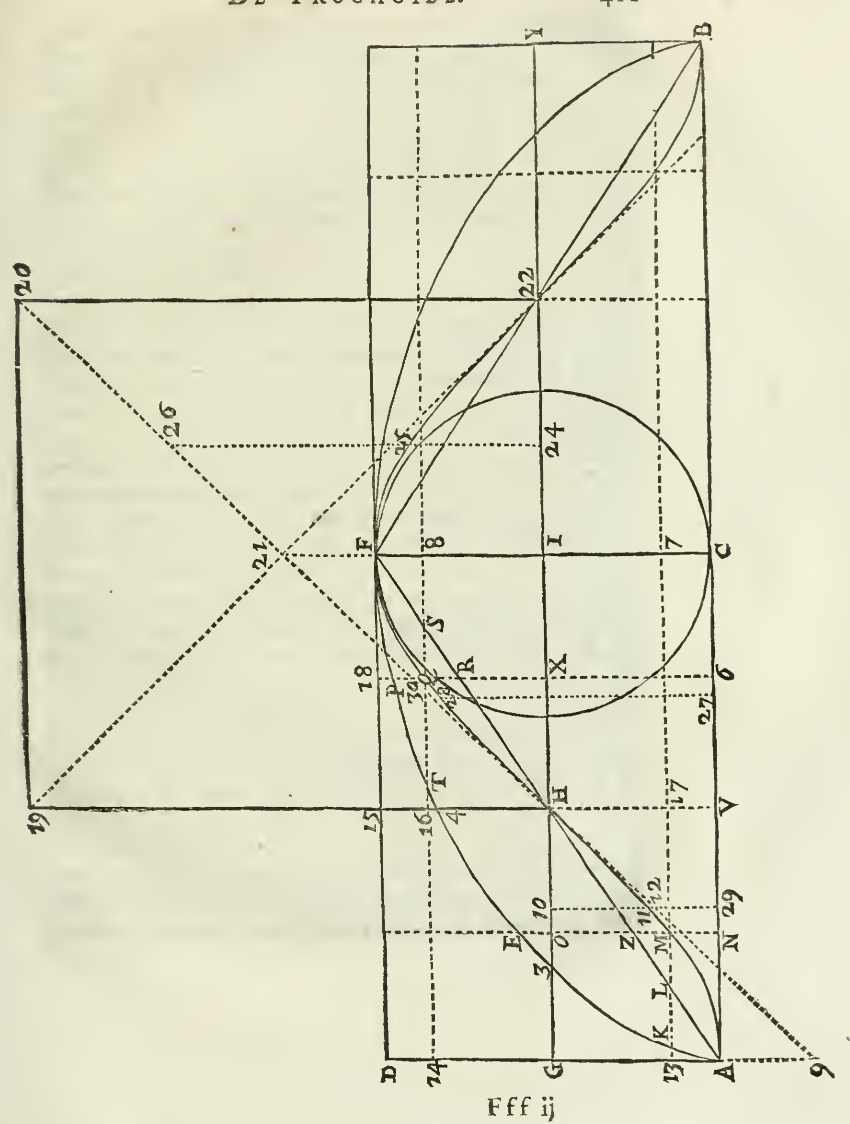
Oſtendamus ergo tale ſolidum conſtare etiam ex omnibus trilineis AEL, ADM, AFN; ABC, &c. vel ex aliis his iiſdem æqualibus; ſic enim patebit omnia hæc trilinea dimidiis omnium quadratorum erectorum eſſe æqualia, quandoquidem tam ab his trilineis quàm ab illis quadratorum dimidiis idem ſolidum conſtituetur, ex doctrinâ indiviſibilium. Ad hoc autem altitudo talis ſolidi, puta recta illa quæ ex puncto A perpendiculariter ad planum ABC erecta, ad ſolidi verticem pertinet, eſtque rectæ AB æqualis, eodem modo indefinitè

dividatur quo divisa est ipsa AB, ut partes partibus multitudine & magnitudine sint æquales, atque per puncta omnia talis divisionis ducantur plana plano ABC parallela, quæ manifestò secabunt solidum propositum inter verticem & basim, & tali sectione constituent trilinea prædictis AEL, ADM, &c. singula singulis similia, æqualia & parallela; ex quibus omnibus trilineis indefinitè sumptis secundùm doctrinam indivisibilium constituitur prædictum solidum quasi pyramidale, ut propositum est: reliqua patent.

Propositio Tertia.

Jam ut ad solidum sociæ trochoidis circa axem conversæ veniamus. In figurâ trochoidis superiùs expositâ, intelligatur socia AMHQF 22 B circa axem CF conversa. Dico solidum ex tali conversione ortum ad cylindrum cui inscribitur eandem rationem habere quam dimidium quadrati semicircumferentiæ rotæ dempto dimidio quadrati diametri, ad integrum quadratum semicircumferentiæ.

Nam sicuti socia illa secat bifariam rectam GI in puncto H, sic eadem bifariam quoque secat rectam IY; esto in puncto 22: undè recta H 22 æqualis erit dimidio itineris centri GI, hoc est æqualis semicircumferentiæ rotæ. Super ipsâ H 22 ad partes verticis F, constituatur quadratum H 22 20 19, cujus diametri ducantur H 20, 22 19 secantes se invicem in centro quadrati, quod centrum sit 21 in axe CIF producto supra verticem F usque ad ipsum punctum 21. Patet autem diametrum ipsam quadrati H 20 esse rectam 9 H productam, ipsamque cadere extrà curvam sive sociam HQF, propter easdem rationes quibus probavimus suprà, rectam H 9 cadere extrà curvam HMA.


B
Y
20
22
26
24
21
F
8
I
7
C
S
R
X
18
6
27
19
15
16
4
T
H
17
V
10
12
29
E
O
Z
M
N
3
L
K
D
14
G
13
A
9

Jam utraque rectarum AC, CF in partes æquales indefinitè dividatur, & per puncta divisionis rectæ AC ducantur rectæ ipsi CF parallelæ, putà NM, VH, 6 Q, &c. usque ad sociam AMHQF; per puncta autem divisionis rectæ CF ducantur rectæ parallelæ ipsi AC, putà 7 M, IH, 8 Q, &c. usque ad eandem sociam. Quo posito solidum sociæ de quo agitur erit ad cylindrum integrum cui inscribitur, ut omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ad quadratum CA toties sumptum: atqui illa omnia quadrata dupla sunt omnium trilineorum ANM, AVH, A6Q, ACF, &c. per secundam Propositionem hujus Appendicis, quare solidum illud ad cylindrum se habet ut omnia hæc trilinea bis sumpta ad quadratum CA sumptum ut jam dictum est, puta secundùm numerum rectarum CA, 7 M, IH, 8 Q, &c. ex divisione diametri CF in partes æquales numero indefinitas, ortarum: hoc autem quadratum semicircumferentiæ toties sumptum æquale est rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes æquales in rectâ AC: quia tam ex tali quadrato CF toties sumpto quot sunt partes in rectâ CF, quàm ex rectangulo AF toties sumpto quot sunt partes in rectâ AC constituitur idem solidum parallelepipedum, illud nempè quod basim habet rectangulum ipsum AF, altitudinem autem rectam AC; sive quod idem est, illud quod basim habet quadratum rectæ AC, altitudinem autem rectam CF, ex doctrinâ indivisibilium.

Itaque solidum sociæ trochoidis sic se habebit ad suum cylindrum, ut omnia trilinea prædicta bis sumpta ad rectangulum AF toties sumptum quot sunt partes in rectâ AC, hoc est toties sumptum quot sunt omnia trilinea prædicta semel sumpta. Verum rectangulum AF duplum est rectanguli AI. Sumpto igitur hoc rectangulo AI bis toties, quoties rectangulum AF, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea

prædicta bis sumpta ad rectangulum AI toties bis sumptum; seu, sumptis tantum semel trilineis ac semel rectangulis, erit solidum sociæ trochoidis ad suum cylindrum, ut omnia trilinea semel sumpta ad rectangulum AI toties sumptum. Est autem triangulum H 20 22 dimidium quadrati semicircumferentiæ H 22, & bilineum HQF 22 est dimidium quadrati diametri CF, quandoquidem hujus bilinei dimidia pars, nempe trilineum HQFI, sive ipsi æquale AMHG ostensum est suprà æquale esse quadrato semidiametri AG vel CI; dempto autem hoc bilineo ex illo triangulo, remanet trilineum HF 22 20. Eò itaque res deducitur ut ostendamus omnia trilinea prædicta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habere ut trilineum HF 22 20 ad quadratum integrum H 20; sic enim demum patebit solidum sociæ trochoidis esse ad suum cylindrum, ut dimidium quadrati semicircumferentiæ dempto dimidio quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ.

Ad hoc autem assumatur quodlibet ex ipsis trilineis, puta A 29 11, assumens ex rectâ AC portionem A 29 forsan quadrante minorem, cui ex rectâ H 22 sumatur æqualis portio HX; ducaturque recta XQ 30 secans sociam trochoidis in puncto Q, rectam autem H 20 in puncto 30. Itaque ex naturâ trochoidis ejusque sociæ A 29 & HX exhibebunt arcus æquales: & arcûs quidem A 29 sinus versus erit 29 11, arcûs autem HX sinus rectus erit XQ: cùmque recta X 30 æqualis sit arcui HX, erit recta Q 30 differentia inter sinum rectum XQ & suum arcum X 30. Unde ex Corollario primæ Propositionis hujus Appendicis, erunt omnes sinus versi arcûs HX sive A 29 ad radium toties sumptum, quot sunt divisiones in semicircumferentiâ AC, sive H 22, ut ipsa differentia Q 30 ad semicircumferentiam H 22, sive 22 20: atqui omnes sinus versi arcûs A 29 constituunt tri-

lineum A 29 11, & radius AG toties sumptus quot sunt divisiones in AC constituit rectangulum AI ex doctrinâ indivisibilium. Ut ergò trilineum A 29 11 ad rectangulum AI, ita recta Q 30 ad rectam 22 20.

De reliquis trilineis eadem erit ratio; ut si sumatur trilineum AVH assumens ex rectâ AC quadrantem circumferentiæ AV; posito etiam quadrante HI cujus sinus rectus sit IF, differentia autem inter ipsum & suum arcum sit F 21; probabitur esse trilineum AVH ad rectangulum AI, ut recta F 21 ad rectam 22 20. Pari ratione, si sumatur trilineum A 27 28 assumens ex AC rectam A 27 quadrante majorem, positâ rectâ H 24 æquali ipsi A 27, ductâque rectâ 24 25 26 parallelâ ipsi CF ac secante sociam quidem in puncto 25, rectam autem H 20 in puncto 26, ut recta 24 25 sit sinus rectus arcûs H 24 sive ipsi æqualis 24 26, recta autem 25 26 sit differentia ejusdem sinus & sui arcûs; probabitur esse trilineum A 27 28 ad rectangulum AI, ut recta 25 26 ad rectam 22 20; atque ita de omnibus trilineis.

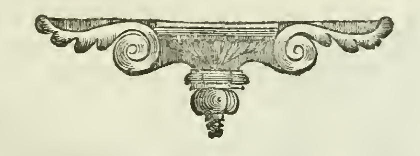
Itaque omnia trilinea simul sumpta ad rectangulum AI toties sumptum sic se habent ut omnes differentiæ sinuum rectorum & suorum arcuum Q 30, F 21, 25 26, &c. ad semicircumferentiam 22 20 toties sumptam: omnes autem illæ differentiæ constituunt trilineum HF 22 20; & semicircumferentia toties sumpta constituit quadratum semicircumferentiæ, ex doctrinâ indivisibilium: unde patet Propositio.

Corollarium.

Recidit autem hæc ratio cum eâ quæ suprà exposita est: siquidem trilineum HF 22 20 continet quadrantem totius quadrati H 20, ac prætereà duplum trilinei HQF 21, hoc est duplum trilinei HMA 9: un-

dè resumptis iis quæ ex primo solido oriuntur, putà quartâ totius parte, ac prætereà eâ portione quæ ad totum cylindrum eam habet rationem quam $\frac{2}{3}$ quadrati semidiamerti ad quadratum semicircumferentiæ, habebimus duos totius quadrantes, hoc est dimidiam partem totius, ac insuper duas portiones, quarum altera ad totum sic se habebit ut $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri ad quadratum semicircumferentiæ; reliqua autem ad totum sic se habebit ut duplum trilinei HQF 21, sive HMA9 ad idem quadratum semicircumferentiæ, ut suprà.

Ut ergò unicâ enunciatione explicemus rationem totius solidi trochoidis circà axem conversæ, ad suum cylindrum; sume duos quadrantes integros quadrati H 20, puta 20 21 22, & 19 21 H; tum ex tertio quadrante H 21 22 sume duplum trilinei HQF 21, hoc est totum trilineum HQF 25 22 21 H, ac prætereà $\frac{2}{3}$ quadrati semidiametri, hoc est $\frac{2}{3}$ trilinei HQFI sive $\frac{1}{3}$ bilinei HQF 22: tumque hæc omnia spatia simul sumpta confer cum toto quadrato H 20; atque ita satis eleganter hoc concludes. Ut se habent $\frac{3}{4}$ quadrati semicircumferentiæ, demptâ tertiâ parte quadrati diametri, ad quadratum semicircumferentiæ; ita solidum trochoidis circa axem conversæ se habet ad suum cylindrum cui inscribitur.



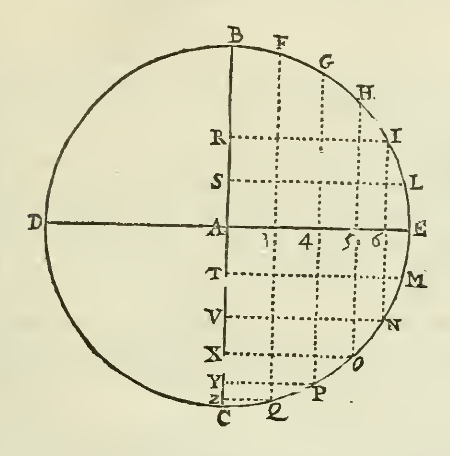
Propositio Quarta.

Quoniam supra in demonstrando solido trochoidis circa basim conversæ hoc tanquam verum sumpsimus, omnia quadrata omnium sinuum versorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{3}{8}$ omnium quadratorum diametri toties sumpti: atque etiam omnia quadrata omnium sinuum rectorum semicircumferentiæ secundùm æquales arcus sumptorum constituere $\frac{1}{8}$ omnium quadratorum ejusdem diametri; lubet hìc utrumque assumptum unicà demonstratione ostendere.

In figurâ primæ Propositionis hujus Appendicis, quadratum diametri BC æquale est quadratis, CZ, ZB, & duplo rectangulo CZB, sive duplo quadrato ZQ. Similiter idem quadratum BC æquale quadratis CY, YB & duplo rectangulo CYB sive duplo quadrato YP: atque ita de reliquis punctis divisionis diametri puta de punctis X, V, T, A, S, R, &c. at rectæ CZ, CY, CX, CV, &c. sunt omnes sinus versi: item rectæ ZB, YB, XB, VB, &c. sunt quoque omnes sinus versi qui prædictis singuli singulis, sed ordine converso sunt æquales; & horum quadrata singula singulis sunt æqualia; atque ita habemus duplum quadratorum omnium sinuum versorum. Sed & rectæ ZQ, YP, XO, VN, &c. per omnes arcus æquales semicircumferentiæ sunt omnes sinus recti; unde habemus duplum quadratorum omnium sinuum rectorùm. Omnia ergo quadrata diametri æqualia sunt duplo omnium quadratorum sinuum versorum unà cum duplo omnium quadratorum sinuum rectorum.

Ducantur jam radii AQ, AP, AO, AN, &c. Itaque quadratum radii AQ æquale est quadrato sinus recti

recti QZ unà cum quadrato AZ, ſive unà cum quadrato ſinus complementi Q 3 : ſimiliter quadratum radii AP æquale eſt quadrato ſinus recti PY unà cum quadrato ſinus complementi P 4, atque ita de reliquis : quo pacto habemus omnia quadrata radii æqualia eſſe omnibus quadratis ſinuum rectorum unà cum omnibus quadratis ſinuum complementorum. Verum omnes ſinus recti omnibus ſinibus complementorum ſinguli ſingulis



ſunt æquales, ſi minores cum minoribus & majores cum majoribus conferantur, quia ſumuntur ſecundùm arcus æquales ex hypotheſi : quare omnia quadrata radii æqualia ſunt duplis quadratorum omnium ſinuum rectorum. Omnia autem quadrata diametri quadrupla ſunt omnium quadratorum radii; ipſa ergo omnia quadrata diametri quadrupla ſunt dupli quadratorum omnium ſinuum rectorum : unde omnia quadrata ſinuum rectorum ſemel

ſumpta, omnium quadratorum diametri octavam partem conſtituunt.

Quoniam ergo duplum omnium quadratorum ſinuum rectorum conſtituit duas octavas partes omnium quadratorum diametri, relinquitur ut duplum quadratorum omnium ſinuum verſorum conſtituat ſex octavas partes, atque ut ipſa quadrata omnium ſinuum verſorum ſemel ſumpta tres octavas partes conſtituant ipſorum omnium diametri quadratorum, ut proponitur.

Propositio Quinta.

Vide Fig. pag. 411. *Sed & illud demonſtrare lubet, quod pro ſolido ſociæ trochoidis circa axem converſæ, priori modo demonſtrando, aſſumptum eſt tanquam quid confectum ex doctrinâ indiviſibilium. Omnia quadrata CA, 7 M, IH, 8 Q, DF, 14 Q, GH, 13 M, &c. quæ ad trilinea primæ diviſionis AHFC, & FHAD pertinent, conſtituere dimidium omnium quadratorum CA, 7 13, IG, 8 14, FD, &c. quæ pertinent ad totum parallelogrammum CD; ac præterea duplum omnium quadratorum portionum AV, M 17, F 15, Q 16, &c. quæ pertinent ad trilinea ſecundæ diviſionis AMHV, & HQF 15.*

Illud autem ſtatim conficitur, ex eo quod ductâ quâcunque rectâ 7 13 ex iis quæ rectæ AC parallelæ ſunt, quæ ſecet trilinea primæ diviſionis, ita ut ejus rectæ portio 7 M in uno trilineo, altera autem portio 13 M in altero contineatur; ſecet autem ipſa 7 13 lineam primæ diviſionis AMHF in puncto M, & rectam ſecundæ diviſionis V 15 in puncto 17: manifeſtum eſt, ex Geometriâ communi, ambo quadrata portionum 7 M, M 13 tantò majora eſſe dimidio quadrati totius 7 13, quantum eſt duplum quadrati portionis M 17, quæ ad trili-

neum ſecundæ diviſionis AMHV pertinet : quod cùm de omnibus aliis rectis verum ſit, patet Propoſitio.

DE LONGITUDINE TROCHOIDIS.

Propositio.

Cujuſcunque aſſignatæ portioni trochoidis primariæ, æqualem rectam exhibere, atque exinde toti trochoidi.

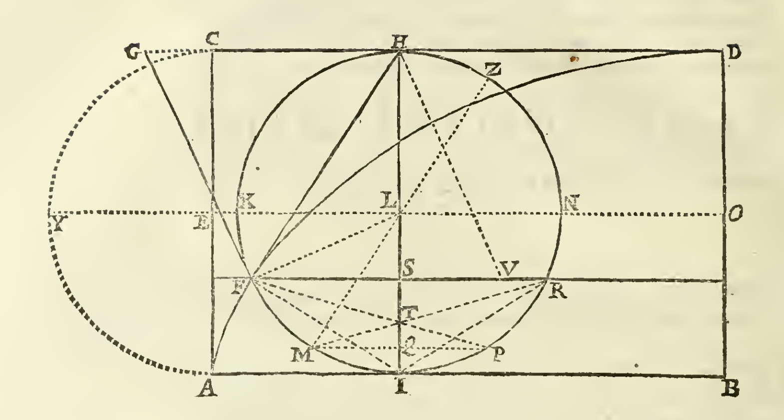
Quid ſit trochoides, quid rota ex qua illa naſcitur, quæ ſint tres illius præcipuæ ſpecies, & quomodo inter ſe diſtinguantur, hîc notum eſſe ſupponimus.

Utemur argumento ex motuum compoſitione deſumpto, quo ex æquali moti puncti velocitate æquales deſcribi lineas, ex inæquali inæquales, cæteris paribus neceſſe eſt, atque è converſo.

Etſi verò communiter rota progrediendo uniformi motu per iter rectum in plano, ſimul circa centrum ſuum convertatur, tamen hîc intelligemus rotam ipſam trahi tantùm recto itinere, non autem converti ; ſed punctum trochoidem deſcribens, ferri ſecundùm circumferentiam rotæ motu uniformi, quod eódem quò ſuprà recidit, & Geometriæ aptius eſſe viſum eſt.

F punctum contactus tam FG rectæ tangentis rotam, quàm FH tangentis trochoidem primariam, cujus dimidium eſt AFD, initium A, recta AIB dimidium baſis, BD axis, AEC diameter rotæ initio motûs, CHD linea verticis.

IXHN rota eſt, cujus centrum L à principio motûs



jam percurrit rectam EL æqualem rectæ AI, existente diametro rotæ in hac positione rectâ ILH; unde ipsa recta EL vel AI arcui IF æqualis est.

GF, GH rotam rangentes æquales sunt; unde ductâ chordâ rotæ FR ipsi AI parallelâ, & sectâ bifariam in S à diametro ILH; ductâ etiam HV ipsi FG tangenti parallela, ac secante ipsam FR productam, si opus erit, in V; erit parallelogrammum FGHV rhombus, cujus anguli GFV, GHV bifariam secabuntur à diagonali FH tangente trochoidem.

M punctum est in quo arcus rotæ FMI bifariam secatur, & à quo ducitur chorda rotæ MQP ipsi AI parallela, secans diametrum IH in Q; sed & ductâ chordâ MR secante eandem IH in T, erunt rectæ QI, QT æquales, propter æqualitatem triangulorum IQM, TQM.

Reliquum constructionis ei qui trochoidem noverit,

per ſe ex ipſa figurâ ſatis oſtenditur : præ cæteris notetetur chorda IM.

Oſtendendum eſt portionem trochoidis AF ab initio A ſecundum longitudinem ſuam curvam menſuratam, æqualem eſſe quadruplo ſinus verſi IQ, ſive duplo rectæ IT. Unde, quoniam AF eſt portio quæcunque dimidiæ trochoidis AFD, oſtendetur ipſa curva AFD æqualis quadruplo ſemidiametri IL, ſeu duplo diametri IH. Hoc erit præcipuum hujuſce Propoſitionis Corollarium.

Quoniam diametri rotæ ILH, AEC initio motûs congruebant, manifeſtum eſt tunc tria puncta I, A, F ſimul extitiſſe, & ambo E, L ſimul, & ambo C, H ſimul : exinde verò punctum I percurriſſe rectam AI uniformi motu, ſicuti & punctum L rectam EL, & punctum H rectam CH, & punctum F ſecundum rotæ circumferentiam percurriſſe arcum IMF; quo factum eſt ut in trochoide primariâ quatuor illæ lineæ AI, EL, CH, & arcus IMF eſſent æquales : at propter implicationem recti motûs AI cum curvo IMF, punctum F tali motu compoſito deſcripſit portionem trochoidis AF, in quo ipſius F velocitas continuò mutata eſt augeſcendo ſenſim ab A in F. Examinemus ergò illam auctionem continuam per omnia puncta ejuſdem AF; ac pro diverſis poſitionibus puncti F, diverſas ipſius velocitates in curvâ AF cum ejuſdem uniformi velocitate in arcu rotæ IMF conferamus.

Incipiamus ab eâ poſitione quæ primum oblata eſt, in qua F eſt quodvis punctum in dimidiâ trochoide AFD ab A diverſum. Patet ex motuum legibus, velocitatem puncti F in curvâ AF ad velocitatem puncti F in arcu IMF ſic ſe habere, ut tangens FH ad tangentem FG in parallelogrammo FGHV : idem verò de ſingulis punctis in curvâ AF aſſumptis dicetur, mutatâ convenienti poſitione rotæ, & ductis congruis tangentibus; augetur

autem ratio FH ad FG dum F fertur ab A in F, ergo & ipſius velocitas; & eſt velocitas uniformis per infinitas tangentes arcûs IMF, ſicuti & ipſius puncti F in eodem arcu. Si igitur ipſe idem IMF infinitè dividatur æqualiter, atque illi diviſioni correſpondeat infinita diviſio curvæ AF (quod tamen fieri æqualiter non continget propter curvæ naturam, quod nihil intereſt) & ſingulis minoribus arcubus ipſius IMF aſſignentur ſuæ tangentes æquales, quibus etiam correſpondeant totidem tangentes curvæ AF, quanquam minimè æquales, erunt per vigeſimam quartam Libri quinti Euclidis, quoties opus fuerit repetitam, omnes tangentes curvæ AF ſimul ſumptæ ad omnes tangentes æquales arcûs IMF ſimul ſumptas, ut omnes velocitates puncti F in curvâ AF, ad omnes velocitates ejuſdem puncti F in arcu IMF: atqui ut velocitates inter ſe, ita ſunt lineæ ab ipſis percurſæ, putà curva AF & arcus IMF. Ut ergo omnes tangentes curvæ AF ad omnes tangentes arcûs IMF, ſic ipſa curva AF ad ipſum arcum IMF; quod primò notetur.

Præterea quoniam recta FG tangit circulum IFH, & à contactu ducitur recta FSR ipſum circulum ſecans, erit per trigeſimam ſecundam libri tertii Element. Euclidis, angulus GFR angulo FIR æqualis, & dimidius GFH dimidio FIS; unde triangula iſoſcelia FGH, FLI ſimilia ſunt. Ut ergo tangens FH ad tangentem FG, ita chorda IF ad radium FL; & diviſis infinitè, ut ſuprà, arcu IMF & curva AF, adjunctiſque iiſdem infinitis minoribus tangentibus, ducantur à puncto I totidem chordæ ad ſingula arcûs IMF puncta; probabimus ex Geometriâ, chordas illas omnes ſimul ſumptas ad radium FL toties ſumptum ſic ſe habere, ut omnes tangentes curvæ AF ſimul ad omnes tangentes arcus IMF ſimul; hoc eſt per primum notatum, ut curva ipſa AF ad arcum ipſum IMF: quod ſecundò notetur.

Jam arcus IM qui ipſius IMF dimidius eſt, dividatur æqualiter infinitè; ſed ita ut in ipſo IM tot ſint diviſiones quot in toto IMF, hoc eſt quot ſunt chordæ in ipſo arcu IMF, ſive quoties ſumptus eſt radius FL; tum à ſingulis arcûs IM punctis in radium IS demittantur totidem ſinus recti, quorum maximus eſt MQ: tot ergo ſunt ſinus recti ab arcu IM, quot chordæ in arcu IMF, & unuſquiſque ſinus unius cujuſque chordæ correlatæ dimidium eſt; unde ipſorum omnium ſinuum ſumma dupla æqualis eſt ſummæ chordarum ſemel ſumptæ. Erat autem ex ſecundo notato ſumma chordarum ad ſummam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF; ergo ſinuum dictorum ſumma dupla ſe habet ad ſummam radiorum, ut curva AF ad arcum IMF. At ut ſumma illa dupla ſinuum ad ſummam illam radiorum, ſic ſe habet duplum ſinus verſi IQ ad arcum IM, per Lemma ad id inventum & ad alia permulta ardua perutile; & ut duplum IQ ad arcum IM, ita quadruplum IQ ad duplum arcus IM, hoc eſt ad arcum IMF. Ut ergo hoc quadruplum ſinûs verſi IQ ad arcum IMF, ita curva AF ad eundem arcum IMF; quare hæc curva AF æqualis eſt quadruplo ſinûs verſi IQ: quod erat propoſitum.

Corollarium.

COROLLARIUM manifeſtum eſt. Si enim pro trochoidis portione AF, ut ſuprà, aſſumamus ipſam dimidiam trochoidem integram AFD, tunc rotæ diameter quæ erat IH, cum axe BOD congruet; & punctum I puncto B, & punctum H puncto D, & punctum L, puncto O, & punctum F punctis H, D, & punctum M puncto X, & punctum Q punctis ſeu centris L, O, & punctum T punctis ſeu verticibus H, D, &c. Unde arcus IMF fiet ſemicircumferentia rotæ IXH, & arcus

IM fiet quadrans IX, & ſinus verſus IQ fiet radius IL, &c.

Itaque per Propoſitionem, ſemi-trochoides AFD ſinus verſi IL erit quadrupla, ſeu diametri IH dupla, quod eſt Corollarium.

Hæc & multa alia, cùm circa annos 1635 & 1640 vigente animi robore detexiſſem, & ferè omnia publicè multotiès patefeciſſem, tam in Cathedra Regia, quàm in multorum doctorum conventibus; immò & quibuſlibet amicis literatis privatim, unicam hanc de longitudine trochoidis Propoſitionem ſemper reticui, ſperabam enim eâdem methodo (quam primus, ut puto, detexi) me multò majora detecturum, atque imprimis multas quadraturas. Nec me ſpes ex toto fefellit; innumeras enim adhuc teneo, non eas tamen quas præcipuè intendebam, de quibus viderint poſteri quibus hæc noſtra ſpeculatio non erit forſan inutilis. Hoc tamen eos monebo, doctrinam de motuum compoſitione adeò univerſalem eſſe, ut nec analyſi ſolâ coerceatur; nec adjunctâ infinitorum doctrinâ, cum rationalibus & irrationalibus, atque logarithmicis quantitatibus; quippe hæc omnia motus comprehendit, non ab ipſis comprehenditur: hinc latiſſimus patet exercitationibus Mathematicis campus, idemque pluſquàm ſolidus.

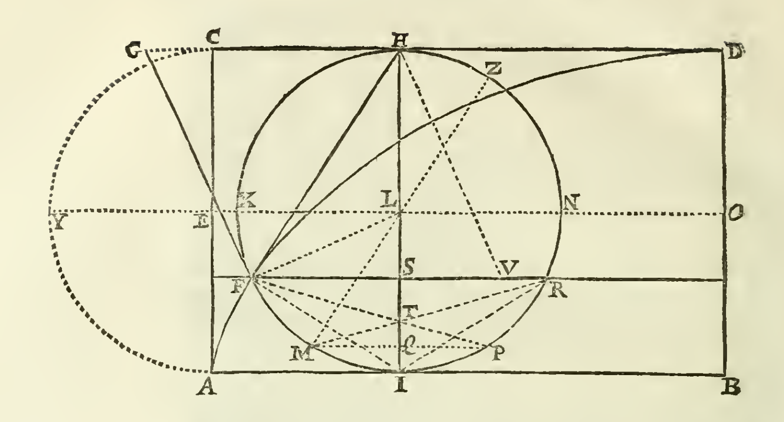
Negligentiâ tamen meâ, quòd nihil prælo committerem, factum eſt ut quidam Extranei nationis noſtræ æmuli, vel potiùs eidem invidi, ex eorum numero qui ut fuci, apum favos invadunt, & quod elaborare non poſſunt mel, vi & injuriâ ſibi vendicant, multa mea mihi eripere conarentur, eaque ſibi tribuere. Sed & ad id adjuverunt ex Noſtratibus quidam, mihi præ cæteris invidi; qui cùm mihi nihil reliquum eſſe cuperent nec inventa mea ſibi arrogare auderent, ne ridiculi apud Gallos

Gallos haberentur, ea cuilibet extraneo, (quamquam multis annis posteriori) quàm mihi suo civi & vero inventori, mallent addicere; & sic contra perspectam sibi veritatem, & verbis & scriptis impudenter mentiri.

His artibus, ipsa trochoides, ejusque tangentes, & plana, sed & solida fermè omnia mihi erepta sunt; ac ne ad extrema fures penetrarent, solus obex obstitit, solidum circa axem, quod de industriâ cum Propositione præmissâ de longitudine reticueram. Sustinui, & expectavi donec circa ipsum solidum fœdè errarent qui præ cæteris sapere videri volebant, quorum ipsorum, super hac re, literas autographas etiamnum asservo, easque non unicas: tunc verò solidum ipsum vulgavi anno 1645, nostrisque atque illis extraneis patefeci, quorum (extraneorum inquam) responsum accepi mœroris atque indignationis plenum, ob errorem contra spem suam patefactum. Lætabar interim, & hæc illis subinde (arrogantiùs forsan) exprobrabam, Certè meæ quisquiliæ alicujus sunt pretii, in quas fures adeò cupidè involent, easque sibi retinere tantâ pertinaciâ contendant.

Possum tamen cùm libuerit, mea à furibus recuperare. Habeo enim ad id instrumenta valida, scripta manu, annis & diebus suis munita à viris celeberrimis; nec deerunt testimonia prælis commissa à quibusdam, prudentiùs quàm ego de futuro furto præsagientibus, idque multis annis ante furtum ipsum: his, dum adhuc vivo, utar, ex amicorum meorum judicio.

Redeo ad præmissam Propositionem de longitudine trochoidis, de qua nihil, nec publicè, nec privatim me communicasse jam testatus sum; eam tamen multis annis postea invenit Anglus quidam vir doctissimus, & prælo per se vel per amicos, suo nomine vulgavit. Methodus illius à nostrâ planè diversa est, sed conclusio vera & elegans. Ait enim portionem quamcunque semitro-



choidis AFD, (ſemicycloidem ille cum multis aliis vocat) putà portionem DF à vertice D incipientem, duplam eſſe tangentis HF. Hanc enuntiationem cum noſtra coincidere, ſic demonſtramus.

Quoniam quatuor arcus FM, MI, IP, PR æquales ſunt, ſecabunt ſe invicem chordæ æquales FP, RM in eodem puncto T diametri IH; & rectæ IQ, QT ſunt æquales; & anguli TFI, TFS æquales; ſed & angulus HFR ſive HFS, æqualis eſt angulo HIF, quia inſiſtunt arcubus æqualibus HR, HF; ergo ſumma angulorum HFS, TFS, æqualis eſt ſummæ angulorum HIF, TFI; prior autem ſumma conſtituit angulum HFT, & poſterior ſumma æqualis eſt angulo externo HTF in triangulo ITF; æquales ſunt ergo anguli HFT, HTF; unde in triangulo HFT latera HF, HT ſunt æqualia: ſed HT cum IT conſtituunt diametrum; ergo & HF cum IT diametrum conſtituunt; & eſt IQ dimidia ipſius IT;

quare HF cum dupla IQ constituunt diametrum; & sic dupla HF cum quadrupla IQ, diametri duplum constituunt. Sed & ex Corollario, semitrochoides AFD ejusdem diametri dupla est; itaque ipsa AFD duplo tangentis HF, & quadruplo sinûs versi IQ æqualis est: demptis ergo utrinque æqualibus, hinc quidem quadruplo sinûs versi, illinc autem portione AF semitrochoidis, superest ut reliqua portio semitrochoidis FD duplo tangentis HF sit æqualis.

Potuit demonstratio directè institui per motuum compositionem, initio sumpto à vertice D, in curva DF portione quâcunque semitrochoidis; quo pacto, conclusio per se incidisset in duplum tangentis HF, ut mox dictum est. Ad hoc, ductâ diametro MLZ ipsi HF parallela, demittendi essent ab omnibus punctis arcûs rotæ HF infinities æqualiter divisi, totidem sinus recti in ipsam diametrum MLZ; & totidem tangentes ad ipsum arcum rotæ HF pertinentes; atque totidem ipsis correspondentes, pertinentesque ad curvam DF; omninò sicuti de arcu IMF, ac de curva AF superiùs dictum est, &c. adhibito tandem Lemmate, & congruis argumentis. Sed prior demonstratio prior etiam in mentem incurrit, in quâ ideò mens ipsa conquievit, quod & Propositionis, & ipsius trochoidis idem esset initium punctum A.

De longitudine trochoidum aliarum ac sociarum omnium, aliàs dicemus.

EPISTOLA

ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL

AD R. P. MERSENNUM.

REVERENDE PATER,

Ex propoſitionibus Clariſſimi Torricellii eas tantum examinandas cenſui, quas nonniſi ab egregio Geometrâ profectas eſſe judicabam. Quapropter prætergreſſis octo primis circa ſphæram, & ſolida eidem inſcripta & circumſcripta, quarum examen, quemvis vel mediocriter verſatum fugere non poſſe exiſtimavi, nonam aggreſſus ſum quæ eſt de dimenſione cochleæ, quam, ut ardua eſt, ita veram eſſe certiſſimâ demonſtratione perſpexi; ita ut ex ea unica Authorem inter præſtantes hujus ſæculi Mathematicos annumerare non verear. Quodque fortaſſis mirere nihil refert; magiſne an minus inter ſe diſtent ſpiræ ipſius cochleæ, modò idem ſit ſemper triangulum à quo deſcribatur; ſed & etiamſi ipſum triangulum moveatur tantum ad motum parallelogrammi, non autem motu progreſſivo, ita ut idem triangulum abſolutâ converſione in ſe ipſum redeat: eodem modo ſe res habebit, nec mutabitur Propoſitio.

De centro gravitatis parabolæ inveniendo à priori, nullâ ſuppoſitâ ejus quadraturâ; ſi ipſe ſic proponit, ut ſe inveniſſe intelligat, laudamus: ſi verò à nobis quærit, dabitur illi non ſolum in parabola conica, quam quadraticam appellamus, quia in ea quadrata ordina-

tim applicatarum inter se sunt, ut portiones diametri; sed etiam in parabola cubica, in quadrato quadratica, &c. atque in earum solidis; sive ipsæ parabolæ circa suos axes, sive circa tangentes ad extremitatem axis, sive circa aliquam ex ordinatis ad axem convertantur, & geniti inde solidi, sive fusi parabolici, dimidium plano ad ipsius axem erecto resectum proponatur: & multa alia de quibus, si aliquando res postulabit, fusiùs agemus. Nunc verò hoc indicasse sufficiat, in dimidio fuso parabolico quadratico centrum gravitatis axem dividere in duas portiones, quarum ea quæ ad verticem ad eam quæ ad basim se habet ut 11 ad 5; in cubico, ut 13 ad 7; in quadrato-quadratico, ut 15 ad 9; in quadrato-cubico, ut 17 ad 11; atque ita in infinitum, addendo semper 2 ad singulos præcedentis rationis terminos. Prætereo rationes solidorum ipsorum ad cylindros quibus inscribuntur, quas omnes invenimus, & quarum speculatio forsan minimè spernenda viro clarissimo videbitur.

In cycloide Torricellii agnosco nostram trochoidem, nec rectè percipio quomodo ipsa ad Italos pervenerit, nobis nescientibus. Quod si illa tanto viro placuerit, lætor. Spero autem brevi fore ut eadem in lucem emittatur, cum suis tangentibus, cumque solido ex conversione illius circa basim genito, forsan & circa axem: neque id tantùm in prima trochoide cujus basis æqualis esse ponitur circumferentiæ rotæ genitricis; sed etiam in quavis alia trochoide sive prolata, sive contracta; atque in sociis earumdem.

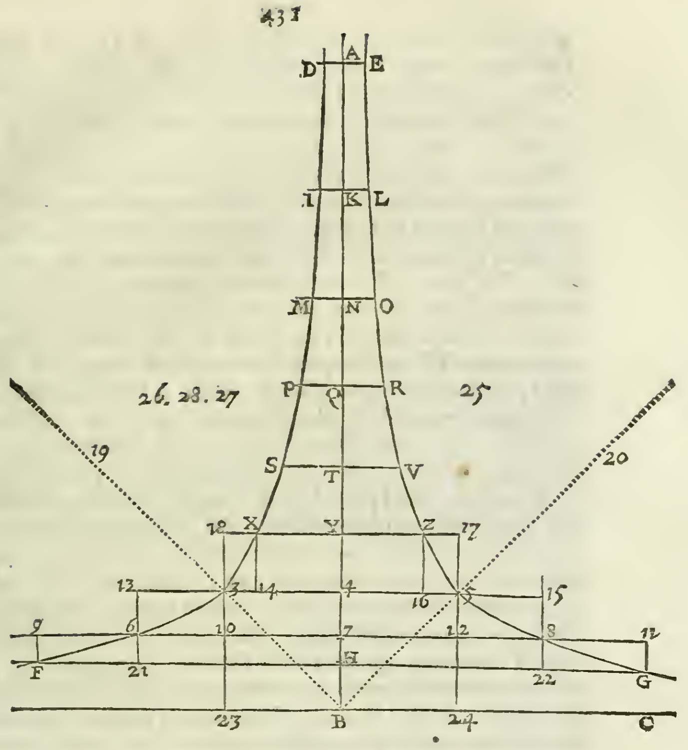
Propositio de solido à qualibet sectione coni circa axem circumvolutâ descripto, atque ad conum eidem inscriptum unicâ enunciatione collato, elegantissima est & verissima, sicut demonstravimus: nec ei inferior est ea quæ sub eadem figura habetur de centro

gravitatis ipsorum solidorum, quam etiam demonstravimus. Quod si ambas duabus tantùm demonstrationibus ostenderit, nihil video quod in hac materia desiderari possit; sed vereor ne positis Authorum demonstrationibus, ipse inde propositiones suas deduxerit: quod etiamsi ita esset, tamen non parum laudis mereretur; neque enim cuilibet contingit, aliorum inventis addere tanti ponderis propositiones.

Ejusdem fere argumenti est sequens Propositio de frusto sphærico duobus planis parallelis secto, de quo nihil dicimus, quia in eo non immorati sumus.

Vide Torricell. de solido Hyperb. pag. 113.

Omnium elegantissima est decima quarta, cujus demonstrationem hîc addere libet, cuperemque valde scire utrum in idem cum clarissimo viro medium inciderim, vel diversum. Igitur in figura cujus constructionem ex ipsius Torricellii Propositione notam esse suppono, existente B centro hyperbolæ, assymptotis BA, BC ad angulos rectos, solido autem quovis DEFG terminato, ut propositum est; primum ostendamus tale solidum medium proportionale esse inter duos cylindros ejusdem altitudinis cum solido, puta rectæ AH, quorum unius basis sit circulus DE, alterius vero FG; ex hac enim cætera demonstrabuntur. Inter BA, & BH, media proportionalis sit BT; tum inter BA & BT, media quoque proportionalis sit BN; atque inter BT & BH, esto B 4. Item inter BA & BN, sit BK; inter BN & BT, sit BQ; inter BT & B 4, sit BY; inter B 4 & BH, sit B 7 atque ita tot continuè inveniantur mediæ quot libuerit, sic enim erunt quoque continuè proportionales differentiæ ipsarum H 7, 74, 4Y, &c. usque ad ultimam KA, & in eadem ratione primarum. Patet autem hac ratione eò deveniri posse, ut cylindrus cujus basis circulus FG, altitudo autem ultima differentia KA, minor sit quovis spatio solido dato. Jam per puncta 7, 4, Y, T, ducan-



tur plana ad rectam AB erecta, ſolidum ſecantia ſecundum circulos quorum diametri 68, 35, XZ, SV, &c. parallelæ ipſi FG; patet quoque ex natura hyperbolæ, proportionales eſſe rectas FH, 67, 34, XY, ST, & reliquas in eadem ratione, ſed inverſa, primarum BH, B7, B4, &c. Denique inſcribantur & circumſcribatur ipſi ſolido totidem cylindri quot ſunt differentiæ, H7, 74,

4 Y, &c. sintque inscripti 8 21, 5 10, Z 14, &c. circumscripti vero F 11, 6 15, 3 17, &c. constat ergo omnes circumscriptos simul superare omnes inscriptos simul, minori spatio quàm cylindro altitudinis KA, & basis FG; hoc est minori spatio quovis proposito. Præterea cylindrus basis SV, & altitudinis AH, est medius proportinalis inter cylindros ejusdem altitudinis, sed basium DE, FG. Dividatur ipse medius in cylindros ejusdem basis SV; sed altitudinum H7, 74, 4 Y, YT, &c. usque ad ultimum altitudinis AK, qui ultimus major quidem est primo inscripto 8 21, sed minor circumscripto F, 11, quod sic ostendimus. Quoniam recta ST media proportionalis est inter DA & FH, major erit ratio circuli medii SV ad circulum 6 8, quàm rectæ DA ad rectam 67: at idem circulus medius SV, ad circulum FG minorem habebit rationem quàm eadem recta DA ad eandem 6 7; ut autem DA ad 6 7, ita H7 ad AK: ergo circulus medius SV, ad basim quidem inscripti 6 8, majorem habet rationem; ad basim vero circumscripti FG, minorem quàm altitudo communis inscripti, & circumscripti H7 ad altitudinem ultimi medii AK. Eodem modo demonstrabimus cylindrum altitudinis NK, basis verò circuli medii SV majorem quidem esse secundo inscripto 5 10, minorem vero secundo circumscripto 6 15; atque ita de reliquis ordine sumptis. Patet igitur tandem, totum cylindrum medium omnibus quidem inscriptis simul sumptis majorem esse; omnibus verò circumscriptis minorem. Cætera persequi apud vos inutile fuerit.

Corollarium.

Corollarium.

PATET autem manifeſtò poſitis rectis BH, B 7, B4, BY, &c. continuè proportionalibus, & factâ conſtructione eâdem, dividi totum ſolidum hyperbolicum FG, ED in portiones continuè proportionales in eadem quidem, ſed inverſa ratione rectarum ipſarum BH, B 7, B4, &c. quæ portiones erunt FG 8 6, 6 8 5 3, 3 5 ZX, &c. quia qui ipſis portionibus æquales erunt cylindri, proportionales erunt in ratione propoſita, quæ proprietas eximia eſt.

Secundò intelligamus ſolidum hyperbolicum BA verſus A infinitè productum eſſe, atque idem ſecari quovis plano 3 5 ad rectam BA erecto in puncto 4, ac circulum conſtituente cujus diameter 3 5; tum ſuper hac baſe, circulo 3 5, eſto cylindrus 3 5 24 23, cujus altitudo ſit B 4 : dico talem cylindrum æqualem eſſe ſolido hyperbolico ſuper baſi 3 5 conſtituto, atque infinitè versùs A extenſo.

Aliàs, vel cylindrus major eſt ſolido, vel minor. Eſto primùm major, ſi fieri poteſt, & exceſſus eſto magnitudo 25, ita ut ſolidum hyperbolicum unà cum ſpatio 25 intelligatur æquale eſſe cylindro propoſito 3 5 24 23. Jam intelligatur cylindrus quidam cujus altitudo B 4, ſemidiameter verò baſis PQ, ita ut hic cylindrus minor ſit ſpatio 25 : ſit autem PQ perpendicularis ad BA, atque interjecta inter hyperbolam, & aſſymptoton, hoc enim fieri poteſt. Tum fiat ut B 4 ad BQ, ita BQ ad BA, & terminetur ſolidum hyperbolicum circulo DAE. Erit ergo ex prædemonſtratis ſolidum 3 5 ED æquale cylindro altitudinis A 4, baſis verò ſemidiametri PQ. Addantur inæqualia ; ſolido quidem, ſpatium 2 5; cylindro verò, alter cylindrus altitudinis B 4, & ejuſdem

basis semidiametri PQ. Fient ergo inæqualia : illinc solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus; hinc verò, totus cylindrus altitudinis AB basis semidiametri PQ, minor. At totus hinc cylindrus æqualis est cylindro proposito 3 5 24 23, quia bases & altitudines reciprocantur ex natura hyperbolæ : ergo solidum hyperbolicum 3 5 ED, unà cum spatio 25, majus esset cylindro 3 5 24 23. Verùm solidum hyperbolicum infinitè extensum versus A, unà cum eodem spatio 25, positum est æquale eidem cylindro 3 5 24 23 : hoc ergo infinitè extensum minus esset sua portione 3 5 ED, quod est absurdum. Esto secundò cylindrus 5 23 minor solido hyperbolico infinitè extenso, si fieri potest; poterit ergo ex ipso solido detrahi portio quædam, puta 3 5 ED major eodem cylindro 5 23; ita ut planum DE, parallelum sit plano 3 5, constituatque circulum cujus centrum A. Inveniatur recta BQ media proportionalis inter BA & B4; seceturque solidum hyperbolicum plano PQR parallelo ipsi 3 5. Jam ut suprà, solidum 3 5 ED æquale est cylindro basis PQR, altitudinis verò A 4 : cylindrus verò 5 23 æqualis est cylindro ejusdem basis PQR, altitudinis verò AB : ponitur autem solidum 3 5 ED majus cylindro 5 23; ergo cylindrus basis PQR altitudinis A 4 major esset cylindro ejusdem basis & altitudinis AB, quod est absurdum.

Tandem proposito quovis solido hyperbolico ex prædictis, putà DEGF : oporteat ipsum dividere in duas portiones quæ datam servent rationem, ut magnitudo data 26 ad datam magnitudinem 27 : fiat ut recta FH ad rectam DA, ita magnitudo 26 ad aliam quampiam 28; dividaturque recta AH altitudo solidi in puncto T, ita ut portiones HT, TA eandem habeant rationem quàm magnitudo 28, ad magnitudinem 27 : & per punctum T ducatur planum STV parallelum plano FG vel

DE, quod quidem planum STV dividat ſolidum hyperbolicum in duas portiones FGVS, & SVED: dico has portiones eandem inter ſe rationem habere, quàm magnitudo 26 ad magnitudinem 27. Nam inter BT & BH media ſit proportionalis B 4: item inter BT & BA media ſit proportionalis BN; & per puncta 4, N ducantur plana prædictis parallela, atque ſolidum ſecantia ſecundùm circulos quorum diametri 3 4 5, MNO. Quoniam ergo continuè ſunt proportionales BH, B 4, BT, erunt quoque proportionales in eadem ſed inverſa ratione rectæ FH, 3 4, S T propter hyperbolam: quare ex prædemonſtratis, cylindrus altitudinis HT, baſis verò diametri 3 5 æqualis eſt portioni ſolidi hyperbolici FGVS. Simili argumento cylindrus altitudinis TA, baſis autem diametri M O, æqualis eſt reliquæ portioni SVED: ſunt autem ipſi cylindri in ratione data magnitudinis 26 ad 27, ut jam demonſtrabimus; quare & portiones ſolidi hyperbolici ſunt in eadem ratione datâ.

Et quidem, quod cylindri ſint in ratione data magnitudinis 26 ad magnitudinem 27, ſic conſtabit. Quoniam ex conſtructione, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita recta FH ad rectam DA: ut autem FH ad DA, ita ſumpta communi altitudine recta ST, rectangulum ſub FH, ST ad rectangulum ſub DA, ST, hoc eſt, ita quadratum 3 4 ad quadratum MN; ſive circulus diametri 3 5 ad circulum diametri MO. Ergo, ut magnitudo 26 ad magnitudinem 28, ita circulus diametri 3 5, ad circulum diametri MO. Addatur hinc quidem ratio altitudinis HT ad altitudinem TA; illinc autem ratio magnitudinis 28 ad magnitudinem 27, quæ rationes ſunt eædem; ex conſtructione igitur, ratio compoſita ex rationibus circuli 3 5 ad circulum MO, & altitudinis HT ad altitudinem TA, hoc eſt ratio cylindrorum, componitur ex rationibus magnitudinis 26 ad magnitudinem 28,

& 28 ad 27; quæ ambæ rationes conſtituunt rationem 26 ad 27, ut propoſitum eſt.

Hîc mirabilis quædam proprietas accidit circa plana ſpatia hyperbolica hujus conſtructionis, illa nempe FG 8 6, 6 8 5 3, 3 5 ZX, XZVS, &c. quæ omnia ſunt æqualia, poſitis continuè proportionalibus rectis BH, B7, B4, BY, &c. ut ſupra cujus quidem proprietatis demonſtratio non erit difficilis eiqui animadverterit omnia parallelogramma iiſdem ſpatiis inſcripta, eſſe æqualia; ſicuti & circumſcripta æqualia.

Tamdem ſi aſymptoti hyperbolæ non ſint ad angulum rectum, vel eædem erunt ex ſe demonſtrationes omnes præcedentes; vel additione, aut detractione conorum quorumdam, fient eædem.

Cæterum, Reverende Pater, hoc ſcias velim, me magnifacere adeo Excellentem Virum, etiam ultrà quàm verbis aut litteris exprimere poſſim. Fac etiam, obſecro, ut ipſe innoteſcat noſtris Geometris, præſertim D. D. *De Fermat*, & *Deſcartes*, quorum utrumque, meo quidem judicio, nec ipſi Archimedi jure quis poſtpoſuerit; hoc enim apud me recipio, fore ut & his & illi gratiſſimum quid facturus ſis.

CLARISSIMO VIRO ROBERVALLIO

EVANGELISTA TORRICELLIUS S. P.

Loquar apertè tecum ſine alio interprete, Vir Clarissime, quis enim diſſimulare poſſit? Et quanquam litteræ tuæ ad Clariſſimum Merſennum miſſæ ſint, cohibere tamen non poſſum animi mei impetum, quin ad te currat, tibique totum ſe dedicet tanquam

Apollini Geometrarum. Fortunatas certè jam existimare debeo nugas meas, atque illas non jam ampliùs nihilifacere, quandoquidem dignæ habitæ sunt, quæ judicium tuum subirent, & animadversionibus tuis nobilitarentur. Principio, ex me quæris an centrorum gravitatis parabolæ à priori, ut inventum à me proponatur, aut quæratur ut ignotum : erubescerem certè ignotum theorema inter alias propositiunculas meas à me demonstratas collocare. Ostendimus illud unicâ, brevique demonstratione; sed eâ occasione admiratus sum fœcunditatem ingenii tui circa tot parabolas atque earum solida, non solùm Geometricè, sed etiam Mechanicè considerata, & ad mensuram scientiamque redacta. De his nihil ego habeo quod proferam, & fortasse non habebo; siquidem difficillimæ, nisi fallor, contemplationis censeo hujusmodi theoremata. Præterea immorari non soleo circa figuras non vulgatas, & circa solida quæ si nova sint, saltem ab antiquis & receptis figuris planis ortum non habeant; atque hoc eâ præcipuè ratione, ut laborum fructus, quando res ex animi voto succedet, communem litteratorum applausum sortiatur, neque sit qui invideat figuras à me ipso fabricatas. Mensura cycloidis, (hoc enim nomine Clarissimus Galilæus appellavit 45 jam ab hinc annis figuram quæ fortasse tibi nunc trochois est) mihi sese ultrò obtulit non speranti, penè dixi non quærenti. Illam deinde quinquies diversis semper principiis demonstravi: Quoad solida nihil habeo : tangentem prædictæ lineæ jam ostenderat mihi Vincentius Vivianus Florentinus Clarissimi Galilæi alumnus, etiam nunc adolescens. Quoad auctorem hujus figuræ, credo ego ingenium tuum acutissimum & feracissimum, illam ex se observare potuisse nemine indicante; hujusmodi enim lineæ natura familiaris erat, constatque ex compositione duorum

motuum, recti & circularis. Attamen vivunt adhuc testes quibus olim Galilæus irritas lucubrationes suas communicavit circa hanc figuram; imò supersunt paginæ aliquot clarissimi Mathematici, in quibus & picturas & aggressiones suas nonnullas circa hoc subjectum jam adolescens delineaverat. Pluribus abhinc annis theorema hoc proposuit ille mirabili Geometræ Cavalerio nostro, ipsique dixit idem quod & mihi, & pluribus aliis confirmavit, nempe se olim experimentum fecisse, appensis ad libellam spatiis figurarum materialibus, quantuplum esset cycloidale spatium ad circulum suum genitorem, & semper illud invenisse, nescio quo fato minus quàm triplum; ideo incœptam contemplationem deseruisse, ob incommensurabilitatis suspicionem. Quod si aliquando, inconstanti fallaciâ, reperisset minus quàm triplum, aliquando verò majus, tunc asserebat Lincæus Mathematicus ulteriorem contemplationem prosecuturum fuisse; rejectâ scilicet variationis causâ in materiæ inæqualitatem atque rasuræ.

Propositionem illam de solido à qualibet coni sectione circa axem revoluta descripto, atque de ejusdem solidi centro gravitatis, unicâ simul brevique demonstratione ostendimus, suppositâ tantum modicâ Apollonii cognitione. Verùm duplex hoc theorema inter neglecta à me rejicitur; nullum enim habebit locum in opusculis, quæ nunc propalare cogor, in quibus præcipuè profiteor materiæ unitatem.

Quoad solidum hyperbolicum, jam non meum sed tuum, disperеam si jam ampliùs spero me visurum tam sublimem & tam doctam demonstrationem quæ cum tua conferri mereatur. Optimum equidem maximumque nunc percipio laborum meorum fructum, eo tantum nomine, quod tu, Vir Clarissime atque Ingeniosissime, tam acutis demonstrationibus, tantâque doctrinæ affluen-

tià , unicam ineptiolam meam illuſtrare dignatus ſis. Gratias primùm ago maximas. Deinde ut deſiderio tuo ſatifaciam, methodus mea circa demonſtrationem hujus ſolidi diverſiſſima eſt à tuâ. Altera quidem ex meis aggreſſionibus per doctrinam indiviſibilium procedit, quæ ſi cum erudito lectore ſemper ageretur, pauciſſimis verbis expediri poſſet : altera verò per inſcriptionem & circumſcriptionem, more Veterum, non adeo expedita eſt, ſed facilis, & fortaſſe curioſa. Hoc unum reperi in tua ſcriptura, quod conveniat cum meis, nempe conſtructio illa pro ſecando fruſto ſolidi hyperbolici in data ratione; demonſtrationes verò ab eadem conſtructione diſſimillimæ emanant.

Cæterùm evidentiores agnoſco hyperbolas in laudibus quibus me exornas, quàm in demonſtrationibus quibus hyperbolicum ſolidum ipſe metiris. Utinam illis aliquando dignus fiam, ut in lectione operum tuorum, quæ avidiſſimus expecto, illa intelligere valeam, fructuſque ſcientiæ ſuaviſſimos, & divitias ingenii inæſtimabiles inde colligere poſſim, & intellectum meum ditare. Vale VIR CLARISSIME, tuorumque Operum, editionem accelera, in publica litteratorum omnium utilitatem.

Florentiæ Kal. Octob. 1643.

EPISTOLA
ÆGIDII PERSONERII DE ROBERVAL
AD EVANGELISTAM TORRICELLIUM.

VIR CLARISSIME,

Si me unum respicerem ; si nullâ existimationis nostræ, si nullâ cæterorum hominum, si nullâ ipsius, quam præ cæteris diligo, veritatis habitâ ratione, internâ animi tranquillitate conquiescerem: non me moveret profectò, quòd vos Deûm atque hominum fidem invocetis, quòd celeberrimorum hominum testimonium in me adducere conemini, quòd denique nullum non moveatis lapidem, ad hoc ut ego meorum ipsius operum plagiarius habear : quippe qui planè mihi conscius sum, ex iis quæ ad vos scripsi, nihil non verum esse; sed fateor ingenuè; longè absum à præstanti illo vitæ philosophicæ statu, tantamque beatitudinem si optare nobis licet, non etiam sperare statim licet. Ego enim inter multos natus, inter multos educatus, cum multis vivere atque conversari assuetus, cum multis etiam necessitudines contraxi; ita ut rebus externis non moveri huc usque nondùm didicerim. Itaque admonet nos existimatio nostra, quam tueri, quamque, si quo id labore liceat aut impendio, promovere tenemur; postulant amici, collegæ, Mathematici Galliarum præstantissimi, quibus omnia me debere fateor; cogit ipsa cui totum me dicavi veritas : ne tam gravem vestram accusatio-

nem

nem prorsùs negligam, præsertim quam nullius negotii fuerit refellere; cùm præter rationes nostras, quæ per se sufficiunt, iisdem ambo testibus utamur. Erit etiam quod de vobis expostulem, & ut spero non injuriâ, qui cùm festucam in nostris oculis quæratis, trabem in vestris non animadvertatis. Nolim tamen ob id tolli inter nos litterarum commercium; quod vos nimiùm rigidè, meo quidem judicio, quasi aliquid nobis timendum minati estis: quin potiùs optarim tales iras, suavissimi commercii redintegrationem esse. Quod si inter nos, per nos ipsos conveniri non potest, judicent amici: nos judicio ipsorum stare promittamus. Ad rem venio.

De propositione Rotæ atque Trochoidum illius, primùm audivi Parisiis anno 1628. (eo enim demùm anno ab expeditione Rupellana reversùs, statui in maxima illa atque omni studiorum genere excultissima urbe, firmas sedes stabilire; cùm anteà vagus, incertis sedibus, diversis in regni Gallici partibus degissem) asseruitque qui proponebat celeberrimus vir Pater Mersennus, talem quæstionem per multos jam annos à pluribus tentatam, eousque insolutam permansisse: cui ego respondi, hoc ei commune esse cum multis aliis vetustissimis nobilissimisque Propositionibus; neque ideò quicquam in illa magis quàm in his mirandum videri, si unà cum illis solutione careret. Ac tunc ipse, cùm difficillimam existimarem, certè supra vires meas, intactam ita dimisi, ut per sex annos de illa ne quidem somniarim. Atque ut verum fatear, ego tunc annum agens vigesimum septimum, etiamsi continuo decennii anteacti exercitio, discendo, docendoque, atque agendo in rebus Mathematicis, in primis verò in Analyticis, quibus etiamnum maximè delector, non mediocriter profecissem; tamen neque cum adhuc habitum mihi comparaveram, neque eas ingenii vires susceperam,

quæ ad ejusmodi quæstiones sufficerent. Interea, cùm mecum ipse sæpiùs cogitarem, quâ potissimùm ratione possem in suavissimæ Matheseos adita penetrare, statui divinum Archimedem, quem ferè unum inter antiquos Geometras suspicio, attentiùs considerare; ex qua consideratione sublimem illam & numquam satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi : sic enim tunc vocabam eam quæ à Clarissimo Cavallerio vocatur doctrina indivisibilium. Ridebis forsan ; &, Hic ergo Gallus, inquies, non solùm trochoidum dimensionem ante nos, si Diis placet; non solùm parabolarum omnium, non solum solidorum ad has & illas pertinentium, non solùm planorum ab helicibus cujuscunque gradus aut dignitatis compræhensorum, non solum earumdem helicum secundùm longitudinem cum prædictis parabolis comparationem, non solùm curvarum omnium tangentes per motuum compositionem, non solùm doctrinam centrorum gravitatis invenerit, sed & præstantissimi nostri Cavallerii indivisibilia quoque? atque illa omnia nobis; hæc illi, plagiarius ille impunè eripuerit? Verumtamen, rideatis licet, & talia, aut iis pejora de nobis putetis, aut vociferemini, Ego trochoides, parabolas, helices, tangentes, & centra ante vos; imò & multò plura non solùm inveni, sed & vulgavi : an vultis ut verum reticeam quod partes nostras adjuvat, falsum autem proferam quod nobis nociturum sit? nos ætate aut tempore saltem priores, ætatis aut temporis beneficia respuemus, & junioribus aut saltem tempore posterioribus, vivi adhuc relinquemus? Apage stultam illam in nosmetipsos injustitiam. Quòd si cuncta ego unicâ epistolâ quam ad vos scripsi, non enumeravi, nihil mirum; illa enim aliunde satis prolixa extitit, nec id necessarium, aut operæ pretium judicavi. Deinde etiam, quid de paucis aliquot propositionibus enumeratis gloriari attinet?

Pauperis est numerare pecus.

Sed de vobis plura posteà : nunc de Indivisibilibus, quoniam illa ad rem faciunt, dicamus. Illa ergo, an ante nos Clarissimus Cavallerius invenerit, nescio : certè illud scio, me integro quinquennio antequam in lucem emiserit, eâ doctrinâ usum fuisse in solvendis multis, iisque planè arduis propositionibus. Attamen, absiste moveri; ego tanto viro, tantæ ac tam sublimis doctrinæ inventionem non eripiam; nec possum; nec si possim, faciam. Ille prior vulgavit : ille, hoc jure, suam fecit : ille, hoc jure, habeat atque possideat : ille tandem, hoc jure, inventoris nomine gaudeat. Absit ut in posterum, quod nec priùs feci, in tali causa, intercessoris ridiculi provinciam mihi suscipiam; præsertim cùm nequidem inter amicos quicquam unquam de tali doctrina vulgaverim, quam neque publici juris facere, nisi post aliquot annos, juvenili quodam mei ipsius amore, decreveram. Quippe sperabam interim, fore ut solutione quæstionum quas quotidie nullo negotio tali instrumento adjutus vulgabam, doctrinæ famam facilè consequerer : neque sanè hæc spes ex toto me fefellit. Postquàm enim ingenti ardore doctrinam ipsam excoluissem, eandemque ad puncta, ad lineas, ad superficies, ad angulos, ad solida præcipuè; postremò etiam ad numeros extendissem, haud fuit difficile ea exequi propter quæ amici lætarentur, invidi disrumperentur. Exultabam ergo nimiùm juveniliter, ac tanto diligentiùs doctrinam ipsam reticebam; dignus planè in quem Poëta dixerit,

Nec ferre videt sua gaudia ventos;

qui detectâ auri fodinâ ditissimâ, dum grana quædam ex ea decerpta ostento, ut ex divitibus ac beatis qui-

dam habeat; interim alius eandem à se quoque detectam, palàm, plaudentibus omnibus, ostendit, ac publici juris facit; ita ut exinde periculum sit ne rideat, si à me quoque inventam fuisse affirmavero. Est tamen inter Clarissimi Cavallerii methodum & nostram, exigua quædam differentia. Ille enim cujusvis superficiei indivisibilia secundùm infinitas lineas; solidi autem indivisibilia secundùm infinitas superficies considerat. Unde ex vulgaribus Geometris plerique; sed & quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt, quique si nihil aliud, certè hoc unum satis habent, ut in magnorum Virorum opera insurgant, quòd à se minimè profecta esse invideant, occasionem carpendi Cavallerii arripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut solida ex superficiebus reverà constare vellet. Quanquam autem illi coram eruditis nihil aliud lucrentur quàm ignorantiæ aut invidiæ titulum, tamen iidem coram imperitis, suâ authoritate, de doctorum famâ non mediocriter detrahunt; nec ab iis illæsus evasit Cavallerius. Nostra autem methodus, si non omnia, certè hoc cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infinita nostra seu indivisibilia sic consideramus. Lineam quidem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero superficiebus, solidum ex solidis, angulum ex angulis, numerum ex unitatibus indefinitis: immo plano-planum ex plano-planis numero indefinitis componi concipimus, atque ita de altioribus; singula enim suas habent utilitates. Dum autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, æqualitatem quandam, vel certè notam aliquam progressionem inter partium altitudines aut latitudines ferè semper observamus. Sed de hoc satis superque: nunc ad vos redeo. Cùm itaque ope indivisibilium multa protulissem, tandem anno 1634.

celeberrimus P. Merſennus trochoidem in memoriam re-vocavit, non ſine gravi expoſtulatione quaſi propoſitionem haud quaquam ignobilem, de induſtriâ præterirem difficultate illius perterritus. Ego ſic caſtigatus cœpi ſedulò ipſam inſpicere; ac tunc quidem, quæ abſque indiviſibilibus difficillima viſa erat, ipſis opitulantibus, nullo negotio patuit. Modus autem noſter ab aliis omnibus quos huc uſque videre contigit, longè diverſus eſt; & niſi me nimiùm amo, idem illis omnibus longè antecellit; quia omnium ſimpliciſſimus, breviſſimus, univerſaliſſimus, & ad ſolida detegenda aptiſſimus exiſtat, ut ſponte à natura productus, cæteri per vim ab arte effícti videantur. Habes annum quo trochoidem invenimus; diem etiam ſi ita expediret adjicerem. Cætera jam ad te ſcripſi, & horum omnium teſtem locupletiſſimum (præterquam plurimos alios, quorum epiſtolas de hac re etiamnum apud me aſſervo) ipſum eundem habeo quem laudas, celeberrimum P. Merſennum. Vide ergo num ſit cur doleam, cùm vos per exprobrationem objicitis propoſitionem illam forſan ante obitum Galilæi nondum fuiſſe inventam, qui tamen vixit uſque ad annum 1642. præcipuè, cùm jam ad vos ſcripſerim me anno duodecimo jam elapſo inveniſſe. Ut ſic mihi tot teſtes habenti, & cui una ſufficere debuit veritas, fidem omnem denegetis. Inventâ infiniti doctrinâ (liceat adhuc eo nomine uti in hac epiſtola; poſthac, abſit) eaque, pro tempore ſatis probè excultâ; ego ad tangentes curvarum animum applicui. Ac primum, vi Analyſeos, methodum quandam reperi, quæ, etiamſi longè poſteà univerſalis eſſe deprehenſa ſit, tamen recens inventa, talis non apparuit: quærebam verò univerſalem; & particulares methodos (ut adhuc) ubique dedignabar. At trochoides noſtræ occaſionem dederunt cur ad motuum compoſitionem reſpicerem. Occaſio ſatis fuit, ac propo-

ſitionem univerſalem tangentium inde deductam vulgavimus circa annum 1636. Extant adhuc, & circumferuntur hac de re lectiones noſtræ à nobiliſſimo *du Verdus* noſtro diſcipulo collectæ, atque à multis exſcriptæ. Itaque jamdudùm fide publicâ nobis aſſerta eſt talis doctrina, nec alii teſtes quærendi, qui omnes habeamus. Circa hæc tempora nempe anno 1635, mediante ampliſſimo ſenatore Domino *de Carcauy*, cœpi per Epiſtolas commercium litterarum habere cum ampliſſimo ſenatore Tholoſano Domino *De Fermat*, de quo quid ſentiam habes in ea Epiſtola quam ad R. P. Merſennum direxi ſuper ſolido veſtro hyperbolico infinito. Is ergo vir præſtantiſſimus, primus omnium, duas propoſitiones nobiliſſimas ad nos miſit ſine demonſtratione: alteram de parabolis, alteram de planis helicum, utriſque per omnes dignitatum gradus ſumptis. (Ne ergo dubites ampliùs, quis primus tales quæſtiones propoſuerit; illæ meæ non ſunt; quanquam illas ego proprio marte, inventâ ad id peculiari noſtrâ methodo, demonſtraverim) immò univerſalius multò quàm ipſe proponas: quippe non ſolùm poteſtates in helicibus propoſuit, ſed etiam poteſtatum radices. Exempli gratiâ: Si in helice ſemidiametri omnium revolutionum ordine ſumptarum, ſe habeant ut radices quadratæ, aut cubicæ, &c. numerorum ordine naturali progredientium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. quarum primam (quadraticam putà) reperies in prima revolutione dimidiam partem ſui circuli conſtituere. Cúmque ipſum arduarum (ut tunc) propoſitionum demonſtrationes rogarem, ille in hæc verba reſcripſit, *Ego*, inquit, *ut invenirem laboravi; labora & ipſe: in hoc enim labore præcipuam voluptatis partem conſiſtere deprehendes.* Quid facerem à tanto viro incitatus? Laboravi, atque in auxilium infinita noſtra advocavi; (nondum enim tunc noſtra ampliùs non eſſe

resciveram) eaque tum primùm ad numeros extendi. Animadverti enim & parabolarum plana, ad sua parallelogramma ; & earumdem solida, ad suos cylindros ; & spatia helicum, ad suos circulos feliciter comparari posse, si innotesceret in numeris ratio summæ potestatum omnium ejusdem generis, ordine, atque indefinitè sumptarum, ad earum maximam toties sumptam ; idque in omni genere potestatum. Quod quidem non difficulter assecutus sum. Illicò idem patuit summam omnium numerorum quadratorum, ordine naturali atque indefinitè sumptorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. ad eorum maximum toties sumptum quot sunt illi quadrati ; hoc est ad cubum ejusdem radicis cum maximo illo quadrato collatam, se habere ut 1 ad 3, sive constituere $\frac{1}{3}$; summam cuborum eodem modo sumptorum, ad eorum maximum toties sumptum, sive ad quadrato-quadratum ejusdem radicis cum maximo cubo, se habere ut 1 ad 4, sive constituere $\frac{1}{4}$; summam quadrato-quadratorum, eodem modo constituere $\frac{1}{5}$; atque ita in infinitum. Ex hac propositione quæ sola sufficit, innumera deduxi corollaria, qualia sunt hæc : Summa radicum quadrararum numerorum omnium, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, collata; putà summa radicum quadratarum horum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. eam habet rationem quam 2 ad 3 ; summa radicum quadratarum omnium numerorum quadratorum, ordine naturali, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 2 ad 4 ; summa radicum quadratarum omnium numerorum cuborum, ad maximam totiès sumptam, ut suprà, se habet ut 2 ad 5 ; atque ita in infinitum, radices quadratæ numerorum quadrato-quadratorum, quadrato-cuborum, cubo-cuborum, &c. ad earum maximam totiès sumptam, ut suprà, sic

comparabuntur, ut antecedens rationis sit semper 2 exponens quadrati; consequens verò sit summa ex ipso exponente 2 & alio exponente ipsius gradus ad quem pertinent numeri quorum sumuntur radices quadratæ. Ut si sumantur radices quadratæ numerorum quadrato-quadrato-cuborum qui sunt septimi gradus cujus exponens est 7, erit consequens rationis 9, conflatum ex 2 & 7, & ratio erit ut 2 ad 9. Similiter, summa omnium radicum cubicarum omnium numerorum ordine naturali, hoc est in primo gradu, atque indefinitè sumptorum, ad earumdem radicum maximam totiès sumptam, se habet ut 3 exponens cubi, ad 4 compositum ex eodem 3 & 1 exponente primi gradus; summa omnium radicum cubicarum omnium quadratorum, ad earumdem radicum maximam toties sumptam ut suprà, se habet ut 3 ad 5; atque ita in infinitum, radices cubicæ omnium graduum, ad earumdem maximam sumptam ut supra, comparabuntur; eritque in omnibus antecedens 3, consequens verò componetur ex eodem 3 juncto cum exponente gradus cujus radix cubica sumpta fuerit. Nec aliter radices quadrato-quadratæ omnium graduum, ad earum maximam sumptam ut dictum est, comparabuntur, eritque antecedens 4; & sic in infinitum infinities, ut satis ex prædictis patet. Hæc cùm ad amplissimum virum scripsissem, dubitavit num eorum demonstrationem haberem. Itaque paucis verbis indicavi eam esse facillimam, per duplicem positionem more Veterum, incipiendo ab unitate, & procedendo ordine per omnes potestates. Quo pacto, facilè est concludere in quadratis, exempli gratiâ, summam omnium numerorum quadratorum ordine naturali, sed finitè, sumptorum, ad eorumdem maximum toties sumptum, collatam, majorem esse quàm $\frac{1}{3}$; at dempto ab eadem summa, seu ab antecedente rationis, ipsorum quadratorum

ctorum maximo tantùm, remanente integro consequente, reliqui rationem minorem quàm $\frac{1}{2}$. Nec ad id demonstrandum, aliò recurrendum est quàm ad genesim quadratorum, quâ fit ut quivis numerus quadratus componatur ex proximo quadrato minore, ex duplo radicis ejusdem minoris, atque ex unitate; quemadmodum etiam quivis numerus cubus componitur ex proximo cubo minore, ex triplo quadrati minoris, ex triplo radicis minoris, atque ex unitate. Qui quidem cubus est ipsum maximum quadratum toties sumptum quot sunt numeri quadrati ab unitate incipientes, atque ita de singulis potestatibus, secundùm uniuscujusque genesim. Corollaria, quomodò ab iis deducantur, aliàs, si ita expediat, explicabimus. Neque etiam fortassis spernendum videbitur corollarium aliud quod ex tali numerorum inspectione deduxi : illud autem tale est. Propositis quotcunque numeris multitudine finitis, qui ab unitate, secundùm naturalem numerorum seriem procedant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c. usque ad 100000000 exempli gratiâ; exhibere summam quadratorum, aut cuborum, aut quadrato-quadratorum, aut cubo-quadratorum, aut cubo-cuborum, &c. omnium talium numerorum : quæ sanè regula, pro quadratis, & cubis, reperitur specialis apud Authores; at pro omnibus potestatibus, nullam apud illos reperimus universalem. Hæc ergo fuit nostra pro parabolarum planis ac solidis, simúlque pro planis helicum, methodus. Post hæc proposuit vir amplissimus (quod & ipse jamdiu in omnibus figuris universaliter quærebam) prædictarum figurarum centra gravitatis invenire. Ac ille quidem ad analysim recurrit, nos ad nostra infinita; unde methodus illius, ut plerisque inventis analyticis acccidit, abstrusissima est, subtilissima, atque elegantissima : nostra aliquot mensibus posterior, simplicior evasit, & universalior; quò fit ut cæteris collata, magis nobis arri-

deat. Ut tamen alicui possit esse universalis, debet is omnibus numeris absolutus esse Geometra, qualis huc usque nullus apparuit. Quoniam verò hoc nostræ hujusce dissertationis præcipuum caput est, ac vos non obliquè aut occultè, sed directè & apertè innuistis methodum nostram, quam tamen huc usque nondum vidistis, illius quam circa finem anni 1644. ad R. P. Mersennum à vobis missam legimus, esse inversam, ac proinde nostram à vestra fuisse desumptam; quo posito tanquam vero, adeo indignamini, ut tres maximas epistolas ad amplissimos celeberrimosque viros, adjectis etiam ad id magnis Appendicibus, gravissimis querelis impleveritis; quò nos nihil tale meritos, acerbissimâ plagiarii contumeliâ afficeretis: idcircò & locus & res postulat ut tam atrocem injuriam, quandoquidem & licet & facilè possumus, à nobis propellamus. Ad hoc autem satis superque futurum speravi, si nostram illam methodum ad vos cum demonstratione mitterem; non quidem suis omnibus numeris absolutam, nimis enim longa est, sed sic digestam, ut à vobis, aliisque non vulgaribus Geometris nullo negotio intelligatur; præcipuè ab iis qui indivisibilia non oderint: alios enim nihil moror, & Geometrarum nomine indignos puto, qui viâ apertâ, tutâ, atque facili relictâ, longuos ac difficiles anfractus sequi malint. Hoc pacto, cùm illa nostra à vestra planè diversa sit, ac diversis omninò fundamentis innitatur, non erit ampliùs quòd vobis ereptam conqueri jure possitis. Eam ergo seorsim cum suis figuris conscripsimus, ne hujus epistolæ lectionem interturbaret.

Facile autem erit animadvertere methodum illam eo modo quo proposita est, universalem quidem esse absoluto Geometræ, attamen eandem à priori raró procedere (universalem autem à priori invenire, hoc est ex sola figuræ aut lineæ definitione, nullâ ejus cum aliâ

quavis figurâ, aut lineâ comparatione factâ, vix ſperandum puto: quæ tamen ſi haberetur, & circuli & hyperbolæ, aliarumque numero infinitarum figurarum quadratum ſimul haberetur) ſiquidem illa in figuris, vix ſolâ plani cum plano aut ſolâ ſolidi cum ſolido comparatione contenta, utramque ſimul & plani & ſolidi aut etiam altioris ſpeciei comparationem perſæpe requirit. Immò, illâ methodo, ſolidorum centra vix directè, ſed plerumque indirectè tantùm, putà mediante aliquo plano congruo deteguntur. Sed nec illa linearum centris inſervit, niſi ipſæ lineæ, earumque proprietates quædam ex præcipuis ac ſpecificis examinari geometricè poſſint: quæ omnia ex adjectis exemplis poſt ipſam methodum ſeorſim videre licet. De methodo Domini *De Fermat*, niſi eam adhuc videris, hoc ſcies, ipſam trianguli, atque planorum parabolicorum omnium & ſolidorum ab iis ortorum centra à priori elegantiſſimè oſtendere. Verùm eandem aliarum figurarum centris accommodare, hîc labor; cum ne quidem à poſteriori, reliquis figuris huc uſque inſervierit; quanquam forſan, quominùs id fieri poſſit, nihil repugnet. Jam quòd ad tempus attinet, meminiſti opinor, Vir Clariſſime, methodum veſtram non ante annum 1644. Pariſios miſſam fuiſſe, atque eandem tunc admodùm recens inventam: ſiquidem, ut ex veſtris literis patet, vobis eâ adjutis, ſolidi trochoidis circa baſim menſura paulò ante demùm patuerat, quam ſub finem anni 1643. nondum habebatis: hæc enim ſunt veſtra verba in primâ veſtrarum ad me epiſtolâ, *Quoad ſolida, nihil habeo.* Ego verò meâ methodo uſus ſum jam ab anno 1637, atque illius ope, & planorum parabolicorum omnium & ſolidorum centra jam tum inveneram; quorum centrorum quæ ad dimidios fuſos parabolicos pertinent, enuntiavi eâ epiſtolâ quam ad R. P. Merſennum de veſtris inventis ſcripſi anno 1643,

quo primùm anno de Torricellio Parisiis auditum est. Hæc, inquam, enuntiavi anno plusquàm integro priusquàm vestra illa methodus appareret; quæ vestris forsan, & nostris, unà cum aliorum inventis (ingeniosè procul dubio) collatis, tandem apparuit. Sed finge id quod non est, ipsam vestram ante annum 1644. fuisse inventam. Finge etiam id quod multò magis non est, ipsam cum nostrâ prorsus convenire, ac planè eandem esse: quid tum? An nos nostram statim ut minime nostram repudiabimus, qui eâ septennio integro ante prædictum illum annum 1644. tanquam nostra, immò verè nostrâ nemine reclamante usi fuerimus? Num potiùs præscriptionis jure nos tutabimur? & quibuscunque intercedentibus, nostram ut nostram lege asseremus, cùm in talium rerum possessione, vel unius diei præscriptionem valere, nemo inficiari possit? Multò ergo potiori jure nunc, quandoquidem nostra & tempore longè prior est, & penitùs diversa, intercessoribus valere jussis, & nostra tota manebit, qualiscunque tandem illa sit; & nostram ubique asserere, & fructibus ab ea productis tanquam nostris uti ubique licebit. Sed neque argumenta quæ produxisti, ejus ponderis esse videntur, ut illa quemquam ex iis qui nos vel mediocriter norunt, in tam sinistram de nobis opinionem pertraherent. Primùm enim, dum ais me nunquam ne verbum quidem fecisse de centro gravitatis trochoidis; cùm intereà tantoperè, & quidem meritò gloriarer de omnibus aliis, quadraturâ, (comparationem cum circulo dicere voluisti) tangentibus, solidis, &c. nec verisimile esse, cùm reliqua omnia proponerem, de unico centro gravitatis siluisse; si illud tantùm speravissem; quod quidem problema, tuo judicio, nulli reliquorum posthabendum videtur: dum hæc ais, inquam, Vir Clarissime, ex tuo genio loqueris; nos, dum scripsimus, ex nostro etiam

genio ſcripſimus. Tu, cùm magnifaceres centra, quia ex iis ſolida deducere poſſe confidebas, ſolida autem præcipuè intendebas; ideò centrorum inventionem magnificè extuliſti, nec cæteris poſthabendam, immò præhabendam judicaſti. Ego contrà, quia ſine centris ſolida & quæſivi & viâ Geometricâ inveni; datis autem ſolidis, ſtatim, & abſque labore centra ſequebantur. Ideò centra ne reſpexi quidem, neque ad ea unquam animum applicui; certus omninò ex præmiſſa noſtra methodo, dato plano quod dudum habebam, ſola ſolida mihi quærenda ſupereſſe; centra autem ſimul cum plano & ſolidis haberi. Quòd ſi apologo uti liceat: ego ſim Æſopi illius Phrygis ſtatuarius: plani trochoidis menſura, eſto mihi ſummi Jovis ſtatua, menſura ſolidi, ſtatua Neptuni; centrum autem, eſto ſtatua Mercurii. Jam adſit nobis è cœlo ſub forma hominis ignoti Mercurius ipſe, Jovis & Maiæ filius; interrogetque, Quanti ſtatua Jovis? Indicabo ſanè ego alicujus pretii. Interroget deinde de ſtatua Neptuni: ego & ipſam alicujus precii indicabo. Tandem interroget de ſua ipſius Mercurii ſtatua, quid ego? quid autem aliud niſi hoc? Amice, ſi priores illas duas emeris, tum tertiam hanc auctarium tibi dabo. Itaque, Vir Clariſſime, quæ tibi Jovis aut Neptuni ſtatua meritò fuit, illa nobis Mercurii tantùm ſtatua extitit. Ignoſce, ſi placet, ſtylo; hoc uſi ſumus ut mentem noſtram aperiremus. De R. P. Merſenno, quid ſcripſerit in ea epiſtola cujus verba toties repetita contra me adducis, neſcio: quid autem illi dixerim ego planè memmini, nec ipſe omninò oblitus eſt; nec etiam illa quæ dixi malè congruunt cum iis quæ ſæpius pro te citaſti. Sed rursùs, nos ex mente noſtra locuti ſumus; ille, ut intellexit, ſic ſcripſit: vos ex mente veſtra interpretati eſtis; ac illa veſtra interpretatio à noſtra mente alieniſſima eſt. Omnibus tamen at-

rentè conſideratis, pace tuâ dixerim, Vir Clariſſime, cenſui præcipuam malæ intepretationis culpam in vos recidere : neque enim verba illius, quæ ipſe adducis, à noſtro ſenſu adeo aliena fuerunt, quin ab iis verum illum noſtrum ſenſum facilè perſpexiſſes, ſi æqui interpretis perſonam tibi aſſumere voluiſſes. Scripſeras ad ipſum te utrumque trochoidis ſolidum beneficio centrorum priùs inventorum detexiſſe : ac illud quidem quod circa baſim, ut ſe habet reverà, enuntiaveras ut 5 ad 8; quod ille cùm verum ſciret (jam dudum enim ego illi tale indicaveram) non ægrè perſuaſus eſt, & alterum quoque circa axem tale eſſe quale affirmabas ut 11 ad 18. Lætus itaque ſtatim ille mihi per litteras ſignificavit habere ſe quod mecum communicare vellet. Adivi; epiſtolam tuam legi, ac circa illud poſtremum ſolidum tantùm quod circa axem, immoratus ſum; quippequod nondum habebam, niſi in terminis vero admodùm proximis, extra quos excurrebat ratio illa à vobis aſſignata 11 ad 18. Hinc ergo, quia de noſtris terminis nullum nobis ſupererat dubium, illicò animadvertimus, rationem illam veſtram 11 ad 18 verâ eſſe minorem. Cùm igitur ſuper hâc re cogitabundus hærerem, tum R. P. ad me prior, Quid ergo, inquit, dices de Clariſſimo Torricellio? nonne inſignium adeò theorematum cognitionem ipſi te debere fateberis? Fateter, reſpondi, ſi vera eſſent; at talia non eſſe certus ſum : miror ſanè quod vir talis falſum pro vero nobis velit obtrudere, nec aliud ſuſpicari poſſum, niſi quod ille Mechanicâ quâdam ratione, per approximationem, hujuſmodi rationem à vero non admodum-longè aberrantem invenerit, exiſtimaveritque veram rationem non poſſe detegi; ac proinde ſuam haud veram eſſe, à nemine poſſe demonſtrari. Hæc, inquam ego tum, oratione, fateor, planè ſcyticâ; quam ille ſuâ ad vos epi-

ſtolâ lenivit, pro ſuo genio qui omninò mitis eſt, ut ex ſtylo ejus ſatis perſpicere potuiſtis. Jam, cùm dixi, Faterer me debere, ſi vera eſſent; planum eſt me non intellexiſſe de ſolido circa baſim quod jamdiu ante vos habebam, & habere me ad vos ſcripſeram; neque de centro trochoidis, quod dato tali ſolido, unà cum plano latere non poterat. Intellexi ergo de ſolido circa axem ac de centro hemitrochoidis quod ab eo dependet, quæ etiamſi brevî habiturum me confidebam, tamen jure præſcriptionis, veſtra fuiſſent, ſi veſtra illa enuntiatio cum vero congruiſſet. Hinc ſanè nemo non videt minimè difficile fuiſſe, ex verbis epiſtolæ R. Patris quæ vos toties citaviſtis, verum ſenſum qualem jam attulimus, elicere : ſed neſcio quo fato aliter accidit unde lis hæc pro re nullius fere momenti, putà pro nugis noſtris, ut ipſe ſæpe loqueris, inter nos ſuſcepta eſt. Itaque, ne quid in poſterum ſimile accidat, ſi tale commercium inter nos continuetur, oro vos ubicunque agetur de propoſitione Mathematica cujus diſcuſſio ad me pertinebit, ne cujuſcunque literis fidem habeatis, niſi manu meâ illæ obſignatæ ſint : ſic enim fiet ut ego mea tantum, non etiam aliorum ſcripta, ex meo ſenſu interpretari tenear. Nam, pace amicorum hoc dictum eſto, hac in materia, ſoli mihi fidere eſſuevi, jamdudum expertus, interpretes pleroſque, vel dum amicis blandiri appetunt, vel dum rem non ſatis intelligunt, omnia literis obſcurare ac prosùs deformare. Unde qui tales literas accipiunt, illi, dum vel placitis laudibus ac blanditiis avidè ſeſe ingurgitant, vel quod obſcurum eſt ad placitum ſibi ſenſum detorquent, fit neceſſariò ut & ſcribentis & primi authoris verum ſenſum longè relinquant. Ac hujuſmodi quidem allucinationis exemplum afferam ex tuis ipſius litteris, ex proprio tuo ſenſu, ſine interprete ad R. P. Merſennum ſcriptis, in quibus hæc habes : *Tibi*

verò, vir clarissime, corollariolum mitto ex ipsis hyperbolis deductum. Quadratura quædam est, quarum centenas, immò infinitas poteram mittere, nisi vidissem satis superque esse unam, ut statim omnes emergant. Deinde in iis quas ad nos scribis, quas ipse R. P. etiam ante nos legerat, hæc habes : *Si unius hyperbolæ primariæ quadratura tam diu quæsita est, nos pro una infinias damus.* Ex quibus verbis statim existimavit R. P. primariæ hyperboles quadraturam à te inventam fuisse. Itaque cùm aliquo post tempore, de ipsis quadraturis cum eo colloquerer, diceremque non difficulter illas assecutum esse me : Habes ergo tandem, inquit ille, hyperbolæ conicæ quadraturam ? Nequaquam, respondi ; neque enim legitima hæc, & nothæ illæ iisdem legibus addictæ sunt. Me misellum, inquit, quantâ spe decido, qui ubi Cleopatræ aut etiam majoris prætii unionem speravi, ibi vitreas tantùm ampullas reperio ! Sed de hoc ipse forsan rescribet : ego verò ideò scripsi, ut tali exemplo monerem hac in materia non esse tutum interprete uti ; cùm etiam absque hoc tantæ eveniant allucinationes. His ergo nostris rationibus, acerbissimæ vestræ accusationis argumentis luculenter respondisse, atque cumulatè satisfecisse speramus. Nunc verò

Aspice num mage sit nostrum penetrabile telum ?

Videamus, inquam, nunc, num sit quod de vobis multò potiori jure queri possim. Ac primùm. Nonne vos trochoidem nostram, postquàm & à R. P. Mersenno & à nobis moniti estis, jam à multis annis eam nostram esse, eamque brevi à nobis in lucem emittendam, postquàm vestris ad ipsum R. P. & ad me literis polliciti estis vos talem messem nobis relicturos intactam ; tamen omni jure, ac vestrâ etiam fide violatis, tanquam vestram non literis modo manuscriptis (quanquam neque hoc ferendum

ferendum fuerit) sed libello ad id prælis commisso, vulgavistis? idque interim, ac eodem prorsùs tempore quo continuis vestris literis contraria promitteretis? Hæccine vestra religio? hæc consuetudo? Quòd si ego huc usque de tali injuria pro rei acerbitate questus non sum, fateor, soli ne id facerem evicerunt communes amici. Quid autem lucri feci illis obtemperando? nempe crevit vobis fiducia, quia me bardum, qui illatarum injuriarum nihil sentirem, existimavistis. Attamen si ad paucula verba quæ super hâc re ad vos scripsi animum adverteritis, facilè ex iis percipietis de me dici posse:

Vultu simulat: premit altum corde dolorem.

Nonne ergo ipse prior idem quod vos, sed non absque causa clamare debui, *Vim patior; incredibile est quanto desiderio expectem responsum super hac re.* Quibus sanè verbis, ac multò etiam pluribus cùm ad R. P. Mersennum tum ad amplissimum D. *de Carcavy* scriptis, non obscurè significavistis vos, nisi coram vobis purgati fuerimus, in nos acerbius quidpiam omninò statuisse; ut sic & injuriâ, & mulctâ simul afficeremur. Sed de hoc satis: nunc ad alia capita transeamus.

Rursùs igitur, nonne primus omnium parabolas ego cum helicibus comparavi secundùm longitudinem? Nonne jam annus quintus excurrit, ex quo theorema vulgavi, idemque meo nomine prælis mandavit R. P. Mersennus? Nonne vos ab amicis rescivistis, ac tum demum anno 1645. ad id animum applicuistis? Habeo sanè super hâc re vestras ad vestros amicos Romanos literas vestrâ manu ac vestro idiomate scriptas. Quid tum? Jam vos palam, omnibus ferè vestris literis gloriamini, non solùm parabolam conicam cum helice Archimedea comparasse, sed & reliquas parabolas cum propriis suis helicibus, immò & quemlibet helicis arcum vel partem,

ſive ex centro incipat ſive non, & ſive primam revolutionem excedat ſive non, demonſtraſſe cuidam lineæ parabolicæ eſſe æqualem. Quid hoc rei eſt? Gloriaris de rebus noſtris tanquam ſi tuæ illæ ſint; atque id poſtquam noſtras eſſe ſic reſciviſti, ut niſi reſciviſſes, nequidem de illis forſan unquam ſomniaſſes. Nec eſt quod fingas exiſtimaſſe te nos ſolam helicem Archimedeam conſideraſſe; nimis enim frigidum fuerit figmentum, & abſque ullo fundamento; cùm una eademque ſit illius & cæterarum, demonſtrationis via & methodus, quam qui invenerit, omnia procul dubio invenerit, ſi modo voluerit, nempe hæc, Quævis parabola unà cum helice ſibi propriâ ſic ſe habet, ut ſi portio axis parabolæ, comprehenſa inter ordinatim applicatam, ad axem, & tangentem à termino applicatæ ductam, æqualis eſſe intelligatur circumferentiæ circuli primæ revolutionis in helice: (intellige helices planas; nos enim conicas quoque cum parabolis comparavimus) applicata autem æqualis ſemidiametro ejuſdem circuli: tum, quæ inter verticem & applicatam interjicitur parabola, æqualis ſit longitudine helici primæ revolutionis. Quòd ſi in eadem parabola ſumatur à vertice quævis portio; à principio autem helicis propriæ ſumatur etiam portio, à cujus termino ducta recta ad helicis centrum, æqualis ſit rectæ à termino ſumptæ portionis parabolæ ad axem applicatæ: erunt & hæ portiones æquales. His ſic à nobis inventis, ſi quis quidpiam addiderit; aut ſi imitando ſimilia effecerit, habeat ſanè quam ipſe laudem merebitur. In helicibus conicis exiſtente cono recto, omnia ſe habent ut ſuprà; modò tantùm loco ſemidiametri circuli primæ revolutionis, qui circulus in ipſo cono exiſtit, ſumatur recta à vertice coni ad circumferentiam ejuſdem circuli terminata. Hic autem, centrum helicis erit vertex coni; & quæ à centro ad puncta helicis du-

cuntur rectæ, erunt portiones laterum coni ejuſdem. At equidem reſciviſſe me fateor, dices. Verùm demonſtrationem proprio marte adinveni. Eſto : quid inde ? Sanè ſi quæſtionem propoſuiſſem tantùm, non etiam ſolviſſem, illa tua fuiſſet, qui prior ſolviſſes : nunc quando prior ſolvi ego, & ſolutam vulgavi, mea eſt ; nec mihi, etiamſi omnes conentur, verè eripi poteſt. An, quæſo, meæ aut etiam veſtræ ſunt parabolarum Domini *De Fermat* quadraturæ ? aut ſpatiorum helicum cum circulis comparationes, quas ambo proprio marte invenimus ? Quid de ipſis ſperetis vos, neſcio ſanè : ego certè, quanquam mea multò quàm veſtra potior ſit cauſa, ipſam tamen prorsùs deſero. An meum eſt ſolidum veſtrum hyperbolicum ? an mea hyperbolarum veſtrarum novarum quadratura ? minimè verò ; attamen amborum ipſorum theorematum demonſtrandorum una eademque eſt methodus, quam nos invenimus, & jampridem ad vos miſimus veſtro ſolido accommadatam, quamque iiſdem hyperbolis accommodare non admodum difficile eſt. Reperi quoque in illarum ſingulis, ex parte unius tantùm ex aſymptotis, reſecari poſſe ſpatium planum acutum & versùs acumen infinitum, quod tamen ſpatio finito atque undique clauſo ſit æquale. Obiter autem, ut verum fatear, nonne iſtis hyperbolis occaſionem dedêre parabolæ illæ Domini *De Fermat* ? Nonne etiam illa noſtra propoſitio de helicibus & parabolis longitudine æqualibus anſam præbuit illi alteri de qua adeò magnificè gloriaris ? de illo, inquam, helicum genere quæ deſcribuntur, dum recta uniformiter quidem circa manens centrum circumvolvitur, at punctum interim ſecundùm illam rectam fertur proportionaliter, quam quidem helicem rectæ cuidam aſſeris æqualem ? Quæ autem ſit illa recta, & quomodo ad datas ſe habeat, tanquam ſi Cereris Sacrum ſit, planè reticuiſti. Non ta-

men nos latet, eam æqualem eſſe hypotenuſæ cujuſdam trianguli rectanguli, cujus unum laterum æquale ſit rectæ à centro ad terminum helicis ductæ: ſedenim, quis triangulum iſtud dabit, ex hypotheſi quod dentur poſitione & longitudine duæ ex iis rectis quæ à centro ad helicem terminantur? vel contrà, quis triangulo dato, dabit helicem? Utrumque ſi dederis, Vir Clariſſime, vel alterutrum tantùm, ego munus id eo munere compenſabo, quod vel ipſe duplo pluris facias. Sed cave: hîc via præceps eſt & lubrica; ac talis, ex qua ad parallogiſmum lapſus ſit facillimus: niſi tamen quod petimus datum fuerit, propoſitio nullius pretii remanebit. Illud etiam non videris animadvertiſſe, propoſitionem hanc non eſſe novam, ſed ipſam prorsùs eandem eſſe cum antiqua illa, quâ quæritur linea per quam pondus ad centrum terræ laberetur ſecundùm uniformem ad ſuum horizontem inclinationem; talis enim linea ad tale genus pertinet. Quàm verò minimè nova ſit propoſitio, teſtabitur ipſe R. P. Merſennus. Verùm, quia datâ inclinatione, hoc eſt, dato ſpecie triangulo rectangulo, datoque centro helicis in centro terræ, dato inſuper uno ejuſdem helicis puncto, putà in ipſius terræ ſuperficie; non poterat geometricè, nec etiam ſuppoſitâ circuli quadraturâ, aſſignari aliud in ea punctum; ideò illa inculta permanſit, ac ferè ex toto neglecta eſt. Neque rursùs, idem ſolum aut primum genus eſt earum helicum, quæ finitæ cùm ſint, infinitas tamen circa punctum quoddam revolutiones abſolvunt: tales enim & longè antiquiores ſunt illæ quæ in globis terreſtribus atque in mappis mundi, loxodromias ſeu ventorum vias referunt, quæque præter has illud habent peculiare, quòd ex utraque parte finitæ ſint; & tamen circa utrumque polum infinities circumvolvantur. Cumque ſic imitando, res Geometricæ in infinitum plerumque abeant,

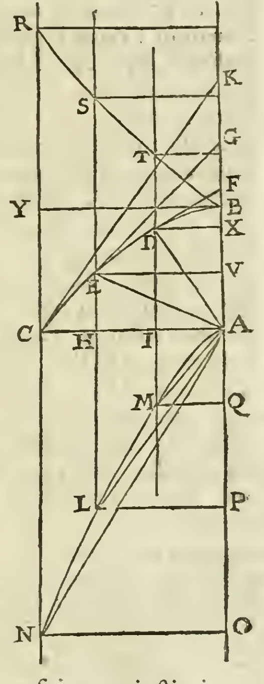
quidni etiam linea recta circa manens centrum æqualiter vel proportionaliter circumvolvetur, ac simul punctum mobile vel æqualiter vel inæqualiter secundùm rectam eandem legibus quibusdam feretur vel à centro, vel versùs centrum, ad describenda infinitiès infinita helicum genera? Ex iis autem, genus illud novimus, cujus helices hyperbolis conicis demonstrantur æquales, quidni rursùs licebit, pro infinitis hyperbolis effingendis, imitari vigesimam primam propositionem libri primi Conicorum Apollonii, sicuti pro infinitis parabolis vigesimam propositionem imitatus est D. *De Fermat*? Verùm hîc omnia persequi nec lubet nec vacat. Superest unum expostulationis nostræ caput circa novas nostras quadratrices lineas, quas non ita pridem, vix scilicet ante biennium invenimus, nec multò post ad vos misimus. Possem hîc, & sanè potiori jure, eadem verba adjicere quæ vos circa centra gravitatis: *Utinam non misissem*; sed illa nimis acerbam, prorsùsque contumeliosam præ se ferunt exprobrationis speciem: quin contrà, & misisse lætor; quandoquidem ita vobis placuerunt; & nisi tunc misissem, nunc utique mitterem. Illas, inquam, lineas ex quibus fiunt spatia plana longitudine infinita, quæ tamen spatiis finitis undique clausis sunt æqualia; vos lineas Robervallianas, ab inventoris nomine, vocavistis; ego voco quadratrices, ab earum officio, & inventionis fine: ego enim figurarum quadraturæ intentus, dum nihil negligo eorum quæ ad propositum illum finem conducere videntur, præcipuè verò ipsarum figurarum in alias figuras transmutationem experior; in tales lineas incidi hac ratione.

Esto in figura, trilineum ABC quale requiritur, cujus punctum B sit vertex; recta AB altitudo; recta AC basis; & linea BC sit quæcunque curva: nihil enim refert qualiscunque accipiatur. Verùm, ut ex infinitis

generibus aliquod hîc eligamus, quod vobis inſtar omnium ſit, eſto illa curva BC ad eaſdem partes cava, putà ad partes ductæ rectæ BC, ita ut ipſa tota ſit extra triangulum ABC, & eadem à puncto B ad punctum C, continuè recedat à recta BA, & ad rectam CA propiùs accedat; ſumpto utroque, receſſu ſcilicet & acceſſu, ſecundùm perpendiculares à curva BC ad rectas BA, AC ductas. Tum in ipſa curva BC, ſumantur continuè à vertice B, quæcunque & quotcunque puncta D, E, &c. à quibus ductæ intelligantur rectæ DF, EG, &c. tangentes curvam BC in iiſdem punctis D, E, &c. atque occurrentes axi AB producto ultra verticem B, in punctis F, G, &c. Intelligatur quoque per punctum C recta CK tangens eandem curvam BC in puncto C; quæ quidem recta CK vel eidem axi AB occurret ultra verticem B, vel eadem CK eidem AB erit parallela, coincidetque cum recta CR, quam ipſi AB ponimus eſſe parallelam. Præthereà, à punctis D, E, &c. ducantur rectæ DI, EH axi BA parallelæ, atque occurrentes baſi AC in punctis I, H, &c. & per punctum A, ipſis tangentibus DF, EG, &c. ducantur totidem rectæ ordine parallelæ, AM quidem ipſi DF; AL autem ipſi EG, &c. occurratque recta AM rectæ DI productæ in M, atque ita habebimus punctum M: occurrat quoque recta AL rectæ EH productæ in L; atque ita rursùs habebimus punctum L & ſic de cæteris. Quo pacto habebimus à puncto A infinita alia puncta continuo ordine diſpoſita M, L, &c. Per hæc intelligatur ducta linea continua AML &c. illa erit primaria noſtra quadratrix: primariam vocamus, quia ipſa prima occurrit, & prima à nobis vulgata eſt; cæteræ autem ab illa primaria, ſaltem per occaſionem, dependerunt. Quòd ſi tangens CK occurrat axi AB, ductâ rectâ AN parallelâ eidem CK, & productâ rectâ RC donec ipſi AN occurrat in N,

Supple rectam lineam BC à puncto B ad punctum C ductam.

erit & punctum N in eadem quadratrice AMLN. Alias autem, si CK coincidat cum ipsa CR (cùm scilicet ipsi AB fuerit parallela) linea AML in infinitum producta nunquam concurret cum recta RC etiam infinitè producta; sed hæc RC producta, ipsius AML productæ erit asymptotos, & punctum N à puncto C infinitè distabit. Potuit etiam loco trilinei, assumi bilineum aut aliud quodcumque spatium; sed omnia exequi unicâ epistolâ, nec possumus, nec volumus, ut ii quibus inventum placuerit, habeant quod imitando addere possint. Jam ergo, in assumpto exemplo trilinei ABC, positis quæ supra diximus, fit quadrilineum quoddam ABCN duabus curvis BC, AN, & duabus rectis BA, CN comprehensum; sive id quadrilineum finitum sit versùs N, sive idem in infinitum versùs illam partem abeat: hoc ergo spatium ABCN dico esse trilinei ABC duplum. Demonstratio nostra omninò universalis erit pro omnibus curvis, & spatiis; poteritque



more Veterum, per duplicem positionem institui, nos tamen per infinita sic procedemus. Ducantur, aut duci intelligantur à puncto A ad infinita seu indefinita numero puncta curvæ BC, rectæ AD, AE, &c. ut sic

ſpatium ABC in infinita trilinea reſolvi concipiatur: quæ quidem trilinea totidem rectis AD, AE, &c. ac portionibus interceptis curvæ BC comprehendantur; ſpatium autem ABCN in totidem quadrilinea reſolvatur, quot ſunt trilinea quæ quadrilinea à parallelis DM, EL, &c. ac portionibus interceptis curvarum BC, AN conſtituantur: erunt ergo ſingula trilinea cum ſingulis quadrilineis, ſuper eâdem baſi conſtituta ad puncta D, E, &c. propter tangentes, (abſque tangentibus enim falſum eſſet) atque in iiſdem parallelis; putà trilineum ad AD cum quadrilineo ad DM, in iiſdem parallelis DF, MA; trilineum autem ad AE, cum quadrilineo ad EL in iiſdem parallelis EG, LA, atque ita de reliquis. Quapropter ſingula quadrilinea ſingulorum trilineorum erunt ut dupla, ex legibus infiniti; & omnia omnium, hoc eſt totum ſpatium ABCN quod ex omnibus quadrilineis conſtat, duplum erit totius ſpatii ABC, quod conſtat ex omnibus trilineis. Patet autem eodem ratiocinio, quadrilaterum ABDM, trilinei ABD duplum eſſe; & quadrilaterum ABEL, trilinei ABE, & ſic de cæteris. Si ergo trilineum CAMLN totum extra trilineum ABC exiſtat, ut in aſſumpto exemplo, erunt duo illa trilinea æqualia, ſive punctum N in infinitum abeat, ſive non. Quòd ſi præterea, eo caſu quo curva AMLN tota extra trilineum ABC exiſtit, ex punctis D, E, &c. ducantur rectæ DX, EV baſi CA parallelæ, atque axi occurrentes in punctis X, V, &c. fient ſpatia BDX, BEV, &c. ſpatiis AIM, AHL, &c. ſingula ſingulis æqualia. Quoniam enim, ex demonſtratione univerſali præmiſſa, totum quadrilineum ABDM, totius trilinei ABD, duplum eſt; & ablatum parallelogrammum AXDI, ablati trianguli AXD eſt quoque duplum, erit & reliquum reliqui duplum: reliquum autem primum conſtat ex duobus trilineis BDX, AIM; ſecundum verò eſt

ſolum

ſolum trilineum BDM : quare duo illa trilinea BDX, AIX ſimul, hujus ſolius BDX dupla ſunt, ac proinde æqualia ſunt inter ſe trilinea illa BDX, AIM. De cæteris eadem eſt demonſtratio. Sed & trilineum BDF bilineo AM, & trilineum BEG bilineo AL, æquale eſſe facile demonſtrabitur; & multa alia quæ conſultò omittimus. Poteſt quoque ad ſolida extendi hoc noſtrum inventum; ſi ſcilicet, prædictæ omnes figuræ circa axem AB utrinque productum quantùm ſatis, convertantur; ac ſpatia quidem ſolida ad rectas AD, AE, &c. conſtituta, pro pyramidibus; ſpatia autem ſolida ad parallelas DM, EL, &c. pro parallelepipedis accipiantur. Quo pacto ſolidum deſcriptum à quadrilineo ABCN, ſive illud versùs N infinitum ſit, ſive non, triplum erit ſolidi à trilineo ABC deſcripti : & ſolidum à trilineo ACN in aſſumpto exemplo deſcriptum, duplum erit ſolidi à trilineo ABC deſcripti; & hinc habentur innumeræ ſpecies ſolidorum infinitè finitorum.

Poſſunt etiam rectæ MI, LH, &c. produci versùs puncta D, E uſque ad puncta T, S, &c. ita ut rectæ IT, HS, &c. æquales ſint rectis DM, EL, &c. & per puncta B T S, &c. poteſt intelligi curva quadratrix B T S: hæc autem illa erit quam ad vos miſimus; de qua ideò nihil eſt quod hîc addamus : quòd autem illa ſecundaria ſit, manifeſtum eſt.

Tandem, ductis tangentibus DF, EG, &c. ut ſuprà; potuit loco puncti A aſſumi aliud quodcunque punctum B vel C, vel quodvis in plano trilinei ABC quantumvis producto exiſtens, per quod ducerentur rectæ tangentibus illis parallelæ; quemadmodum hîc ductæ ſunt AM, AL, &c. & per puncta D, E, &c. duci quoque potuerunt totidem aliæ rectæ inter ſe & cuivis datæ parallelæ, quæ cum tangentibus & tangentium parallelis parallelogramma conſtituerent, qualia ſunt A F D M,

AGEL, &c. unde aliæ infinitæ generabuntur quadratrices : ſed hæc nunc indicaſſe ſufficiat. Vides itaque, Vir Clariſſime, quàm latus hoc loco ad imitandum pateat campus. Vides etiam alia prorsùs à tuis hyperbolicis diverſa genera ſolidorum, & multitudine innumerabilia, & illis forſan, magis miranda ; eo quòd hæc noſtra de externa ſua latitudine nihil unquam remittant, ut veſtris neceſſariò accidit. Neque tamen noſtra nos ad veſtrorum imitationem effinximus (quod ſi factum fuiſſet, quantumcunque abſtruſa, vobis tamen tribueremus) ſed hæc à noſtro linearum quadraticarum invento ſic dependerunt, ut ab illis ſejungi non potuerint. Vides denique nos nec plana, nec ſolida infinitè finita præcipuè intendiſſe ; ſed noſtras quadratrices, quæ ex figurarum in alias transformatione naſcuntur, ex quarum origine talia ſpatia neceſſariò conſecuta ſunt; & nobis aliud animo agitantibus, ſeſe ultro obtulerunt.

Jam, quadratura parabolæ quomodo ex prædictis facilè deducatur, ſic oſtendimus. Intelligatur in hoc noſtro exemplo, curva BC eſſe quævis parabola, ſive conica illa ſit, ſive alia : (unica enim omnibus inſervit demonſtratio) cujus axis ſit AB ; vertex B ; baſis AC ; & recta BY ipſam tangat in vertice, occuratque rectæ NC productæ in puncto Y, ut ſit parallelogrammum ABYC ſpatio trilineo parabolico ABC circumſcriptum. Ducantur etiam, vel duci intelligantur à ſingulis punctis curvæ AMLN, putà à punctis M, L, N, &c. rectæ MQ, LP, NO, &c. baſi AC parallelæ occurrentes axi BA producto in punctis Q, P, O, &c. quo pacto, conſtiruetur aliud quoddam trilineum ANO, cujus axis erit AO, vertex A, & baſis NO. In hoc trilineo, rectæ ad axem ordinatim applicatæ erunt MQ, LP, NO, &c. quæ ordinatim applicatis in parabola, DX, EV, CA, &c. ſingulæ ſingulis debito ordine ſumptis, erunt æqua-

les; at portiones axis AO inter verticem A, & applicatas interceptæ, putà AQ, AP, AO, &c. æquales erunt rectis FX, GV, KA, &c. singulæ singulis debito ordine sumptis: quæ omnia ex constructione manifesta sunt. Est autem in quavis parabola, ut FX ad XB, sic GV ad VB, & sic KA ad AB, propter tangentes DF, EG, CK. Quare erit quoque, positâ in nostro exemplo quâvis parabolâ BDEC, ut AQ ad BX, ita AP ad BV, & ita AO ad BA, &c. Est ergo curva AMLN parabola ejusdem speciei cum parabola BDEC; cùmque AC, ON sint æquales, erit spatium AON ad spatium ABC, ut axis AO ad axem AB. Ostensum autem est spatium ABC æquale esse spatio ACN; quare spatium AON ad spatium ACN est ut AO ad AB: & componendo parallelogrammum ACNO ad spatium ACN, sive ad spatium ABC, se habet ut recta OB ad rectam BA. Sed ut parallelogrammum AY ad parallelogrammum AN, ita recta AB ad rectam AO; ergo, ex æquo, in ratione perturbata, erit parallelogrammum AY ad spatium ABC, ut recta OB ad rectam AO. Datæ autem sunt rectæ illæ OB, AO, quia AO ipsi AK datæ æqualis est, ex constructione: ergo data est ratio parallelogrammi AY ad spatium trilineum parabolicum ABC, ut propositum est; & est talis ratio ut recta composita ex AK & AB, ad rectam AK.

Simili ratiocinio, in solidis ipsarum parabolarum circa axem AB conversarum, concludemus universaliter sic esse cylindrum AY ad solidum ABC, ut recta composita ex AK & dupla ipsius AB, ad ipsam eandem AK.

Quomodo ergo in ejusmodi quadratrices inciderim, jam tenes: quàm verò ingenuè ad vos miserim, ipsi scitis: sciunt & Academiæ nostræ proceres, qui omnes epistolam nostram, antequam ad vos mitteretur, perlegerunt; sciunt & multi alii cum quibus eandem ego, vel amici communicavimus; sciunt, inquam, illi omnes,

me expressis verbis, veluti florem quemdam ex horto illo delectum, vobis indicasse quadraturam parabolæ primariæ seu conicæ. Quis igitur meo loco constitutus; fore speravisset ut Clarissimus Torricellius, inde per imitationem, cæteras parabolas quadrandi arreptâ occasione, (quod nullius fuit negotii, quia una eademque est omnium methodus) hæc verba subjiceret: *Prædictæ methodi, tum pro quadraturis, tum pro tangentibus, sunt quas minimi præ cæteris ego facio; non tamen patiar mihi illas eripi.* Et hæc: *Linea Robervalliana, si ortum ducat ex aliqua parabolarum, semper parabola evenit ejusdem speciei; quod ego novum esse scio, licet fortasse turpe videatur hoc fateri.* Et rursùs in alia epistola: *Quadraturas ad Clarissimum Robervallium mitto, fortassè ad subeundam eandem fortunam cum meo centro gravitatis cycloidis*, hoc est trochoidis. Atque ita, sicuti palam nos accusaverat Torricellius, tanquam si centrum illud nostræ trochoidis, à nobis illi surreptum fuisset, sic timere se simulavit, ne eodem fato illæ suæ (si Diis placet) parabolarum quadraturæ sibi à nobis eriperentur. Quis, inquam, hoc speravisset? Nam, Deum Immortalem! quid illis in quadraturis aut novum est aut ad Torricellium pertinet, ut ei possit eripi? An in universum quadraturæ illæ sunt Torricellii? Nequaquam. Primariæ enim sive conicæ parabolæ quadratura Archimedis est; cæterarum autem, D. *De Fermat*: dico D. *De Fermat*; quia cæterarum illarum medium à medio Archimedis planè diversum est, & diversum esse debuit, quandoquidem ad illas, medium Archimedeum omnino ineptum est. Quòd si omnibus illud aptum fuisset; tunc, quantumvis ab eo diversum esset medium D. *De Fermat*, omnes tamen illas quadraturas uni Archimedi tribueremus, ac cæteras per imitationem inventas ad primariam remitteremus. Si quidem facile est in-

ventis addere : authorem verò ſeſe præbere, hoc opus hîc labor eſt. Non igitur aut Torricellii, aut noſtræ ſunt parabolarum quadraturæ in univerſum; nec illæ aut ipſi aut nobis eripi poſſunt. Supereſt igitur ut de medio decertemus. Sed ad quid hoc? Quandò, ſive ego vicero ſive Torricellius, ipſa res vel Archimedi cedet, vel D. *De Fermat*. Attamen quod in eo medio præcipuum eſt, noſtrum eſt, ipſo Torricellio concedente, nempe noſtra quadratrix, quam ipſe Robervallianam vocat. Quid igitur ipſi relinquitur? Forſan, inquiet aliquis, vult Torricellius ſuum eſſe, quòd uſus fuerit complementis æqualibus parallelogrammorum, eaque prædictis Robervallianis quadratricibus accommodaverit, ut duplici poſitione inſcriptorum & circumſcriptorum uteretur more Veterum. Atqui ob tantillum, quod nec ipſum univerſale eſt, adeo ſollicitum eſſe, adeoque invigilare ne ſibi eripiatur, pauperis cujuſdam eſt, qui hoc unum poſſideat, non autem ditiſſimi Torricellii, qui infinitos rerum multò preti oſiarum poſſidet theſauros. At, dicet alius : Robervallius unicam parabolam primariam ſeu conicam, Torricellius verò omnes omninò quadravit. Robervallius ſcilicet unicam! Quis autem nos uſqueadeo cæcos exiſtimaverit? præcipuè cùm una eademque ſit omnium methodus quam ſuprà oſtendimus? Egone in eo quod difficilius fuit, ſi tamen quid ibi difficile dici potuit, nempe in quadratricibus ipſis detegendis, atque in primariæ parabolæ quadratura preſpicax; in facillimis repentè cæcutiero? Quin ergo ſaltem enuntiaviſti? Satis fuit unam enuntiare; cæteræ ſponte ſequebantur. Quid hoc rei eſt? An tandem ego ea omnia ignoraſſe cenſebor, quæcunque unicâ quam ad Torricellium ſcripſi epiſtolâ expreſſis verbis non comprehendi? Reſpiciat ille ad verba noſtra, ut quid voluerimus intelligat : florem mittebamus, non arborem. Ac jam

decennium eſt ex quo abſolutis nothis illis parabolis, vix animo occurrit, niſi urgeat occaſio, ut illas ampliùs nominem; Torricellio verò ipſæ novæ ſunt, adeoque ipſarum ille non obliviſcitur, ut magnum quid putet, ſi centum modis illas quadraverit, cùm tamen infinitis id fieri poſſit. Rursùs ergo, quid in illis quadraturis novum eſt quod ad Torricellium pertineat? Non video ſanè: attamen ſcire geſtio, ne quod illius eſt, quodque ſibi eripi minimè paſſurum eſſe minatur, imprudentes auferamus.

Jam perſpiciat quicunque Torricellii legerit epiſtolas, quàm multa prætercam legitimæ expoſtulationis capita. Enimverò, illud ne viro ingenuo ferendum fuit, quod nobis comminando ſcripſit ſuper aliâ quâdam methodo centrorum gravitatis inveniendorum, quam habere ſe gloriatur? *Oro vos*, inquit, *ne inter veſtra hanc etiam habeatis: nam hoc eſſet tollere penitus omne litterarum, ſcientiarumque commercium.* Quid aliud ad manifeſtum furem ſcribi potuit? Interim tamen, de illa methodo callidè ac de induſtriâ tacuit Torricellius: ita ut ſi aliquam ego aut alius quiſpiam proferamus, jam ipſi liberum ſit illam aſtutiis ejuſmodi, atque in longum proſpicientibus verbis, ſibi aſſerere, ac de ea locutum eſſe ſe, ſuâ fide affirmare.

Quis rursùs feret quod ad R. P. Merſennum ſcribit, cùm de centro noſtræ trochoidis loquitur? *Quod certè* (ait) *immò certiſſimè ſcio non habuiſſe Robervallium, antequam demonſtrationem meam videret; ut P. V. vel ipſemet, vel tandem univerſa Europa teſtis eſſe poterit.* De centro illo jam ſatis ſuprà, immò uſque ad nauſeam; nec circa illud univerſa Europa teſtis nobis formidanda; quin, ſi fieri poſſet, præ cæteris optanda. Verùm, quid tale centrum ad univerſam Europam? Crede mihi, Clariſſime Torricelli; eſto (quod tamen ſine arro-

gantia dici non poteſt) quòd in rebus Mathematicis ambo ſimus egregii ita ut paucos pares, nullos agnoſcamus ſuperiores : nequaquàm tamen, hoc pacto, tales erimus quos univerſa reſpiciat Europa; nempè miſellos Geometras de neſcio quo puncto diſceptantes. Simus potiùs ambo, ego triginta millium peditum noſtrorum veteranorum dux, tu totidem veſtrorum : adſit utrique equitatus tali numero debitus, nihilque deſit armorum, annonæ, aut fidei militum erga duces; ac tunc univerſa forſan nos reſpiciet Europa.

Hoc loco, Vir Clariſſime, cogitare ſubiit quî fieret, ut cùm ſemel ad te ſcripſerim (prima enim alia noſtra de te epiſtola ad R. P. Merſennum directa fuerat) idque ſtylo qui meo & amicorum judicio, nihil omninò acerbi, quanquam poſt ereptas à te nobis noſtras trochoides, redolet; ipſe tamen è contrario, acri adeò ſtylo reſcripſeris; nec mihi ſoli, quo pacto faciliùs res componerentur, ſed tribus (neſcio num etiam pluribus) literis ad ampliſſimos celeberrimoſque viros de me ſcriptis, haud alio argumento quamquòd exiſtimares (nimis tamen leviter) centrum trochoidis ipſius tibi fuiſſe ereptum. Tantuſne Torricellio earum quas ſuas putat, nugarum zelus (liceat eo tibi familiari nugarum vocabulo uti) ut ſtatim atque eas ſibi ereptas putaverit,

Irruat & fruſtra ferro diverberet umbras,

ne quidem cogitando quantas ille, cùm directè, tùm indirectè, ab aliis ſumpſerit, ob quas periculum ſit ne quamvis placidos acriùs irritando, ipſe viciſſim pœnas luat? Atqui conſentaneum erat, vir prudens cùm ſit, ut meminiſſet hujus præcepti, quod qui dedit, is procul dubio fuit ad unguem factus homo; videlicet,

Qui, ne tuberibus propriis offendat amicum
Poſtulat, ignoſcat verrucis illius.

Equidem, inter plurimas hujusce tam acris styli causas, hæc nobis videtur probabilior, quod tu, Vir Clarissime, spatium Mathematicum ingressus, seu fato seu sponte, viam à nostris jam à ante plures annos tritam inieris, à qua huc usque parùm deflexeris; unde non mirum est si in easdem stationes, littora, portus, fluvios, & regiones incidas, quibus illi dudum detectis nomina indiderunt, eaque omnia in chartas intulerunt: ipse autem, cùm illa à te primùm detecta existimes, fit ut posteà indigneris si quis contrarium asseruerit, atque id quod verum est candidè enarraverit. Memineris ergo spatium illud infinities infinitè infinitum esse, idemque solidum, immò etiam plusquàm solidum, tibi verò nec pedes, nec pennas, nec alas deesse: deflectas ergo paululùm vel ad dextram, vel sinistram, vel suprà vel infra: curre, nata, vel etiam vola.: hæc enim potes omnia, quæ sanè

pauci, quos æquus amavit
Jupiter, aut ardens evexit ad æthera virtus,
potuere;

sic enim fiet, ut, quod non semel, immò pluries jam præstitisti, & novas regiones detegas, & viros doctos non solùm adeò feliciter imiteris, quanquam nec ipsum laude caret; sed, quod multò laudabilius est, teipsum viris doctis præbeas imitandum.

Huc usque pro nobis plura diximus: nunc pro divino Archimede pauca liceat. Bis, ut tua excuses, tantum virum in discrimen adducis, Vir Clarissime; semel pro libris tuis de motu projectorum; iterum autem, pro illâ tuâ minimè verâ ratione solidi trochoidis circa axem, ad suum cylindrum ut 11 ad 18. Ac primùm quidem, pro libris de motu projectorum hæc ais: *Archimedes supposuit olim projecta, non per parabolas sed per lineas spirales*

ſpirales ſuas procedere. Hanc Archimedis ſuppoſitionem nullibi videre licuit in ejus operibus : commentarios autem, forſan, non omnes legi ; ſed nec eorum authoribus licuit tanto viro abſurdas ejuſmodi ſuppoſitiones affingere. Deinde, pro excuſando veſtro illo fictitio trochoidis ſolido, hæc ſcribis ad R. P. Merſennum : *Habemus apud Archimedem, prop. 2. de circuli dimenſione, circulum ad quadratum diametri eſſe ut* 11 *ad* 14 *: quæro ab ipſo* (*Robervallio, ſupple*) *undenam putet me habuiſſe rationem quam ad numeros* 11 *&* 18 *reducebam ?* Quæ poſt verba illa ſequitur linea, ſolitam totius epiſtolæ redolet acerbitatem. Equidem Archimedes hæc habet : at non diſſimulavit ſtatim (nempe propoſitione tertiâ, quæ manifeſtò lemma eſt ad illam ſecundam) talem rationem 11 ad 14 non eſſe accuratam, ſed tantùm veræ proximam : apud vos autem nihil tale habetur ; ſed veſtram illam rationem 11 ad 18 tanquam accuratam propoſuiſtis, ex invento priùs centro tanquam accurato deductam : immò, illam pro accurata exceperunt quicunque exiſtimaverunt vos adeò candidos eſſe, ut nefas exiſtimaretis ea enuntiare quæ vera non eſſent. Enimverò, Vir Clariſſime, plerique ex noſtris vix perſuaderi potuiſſent, Torricellium nobilem adeò Geometram, aliquid purè Geometricum ſine demonſtratione affirmare voluiſſe. Sed nec illa veſtra ratio 11 ad 18 ex terminis vero proximis ab Archimede aſſignatis pro circuli dimenſione deducta eſt, cùm eadem extra ipſos terminos longè evagetur ; unde non video quid vobis hîc proficiat Archimedis authoritas, præcipuè in materia purè Geometrica, ubi pro errore accipitur quidquid accuratè verum non eſt, quantumcunque illud ad verum proximè accedere deprehendatur.

Hîc fieri poſſe video, ut aliquis hujuſce noſtræ epiſtolæ ſtylum ideò carpat, quòd ille nec amico, nec ad-

versario convenire videatur ; ut potè qui pro amico, acrior, pro adversario contrà, lenior quàm par sit appareat. . Equidem, Clarissimum Torricellium adversarium habere absit ut unquam optaverim ; adversarius sanè illi ego ero nunquam, nisi ipse prior talem me effecerit. Quòd autem amicum & cupierim & adhuc cupiam, argumentum certissimum est, quòd prior amaverim, ac nomen ejus celebre per Galliam, quàm maximè potui, reddiderim. Siccine ergo (urgebit censor) cum amicis tuis te gerere solitus es ? Primùm quidem, apologiam contra acerbam ipsius accusationem mihi debui ; deinde metui (fateor) ne ipse quem summopere amicum mihi cupio, ex illis esset qui aliena veluti perspicillis cavis respiciunt ; sua, convexis aut iis forsan quæ plurimis faciebus distinguntur, unde fit ut iidem aliena contractiora, sua verò ampliora aut numerosiora, aut etiam pulchris coloribus ornatiora quàm sint reverâ videre videantur. Itaque admonere eum volui officiosè, ut amorem proprium alieno temperaret. Ac, ne ad excitandum duriusculus haberetur, stylum adhibui utcunque acutum & mordacem : sic enim fore speravi ut sapiens cùm sit, se ab amante pungi sentiret, atque ita ad redamandum acriùs incitaretur. Quanquam autem tot paginas minimè inutiles fore spero, doleo tamen quòd illas in tractando ejusmodi ingrato ac planè tædioso argumento insumere oportuerit ; cùm alia ferè innumera longè suaviora, ac viris doctis, ut puto, acceptiora, cùm ex nobis, tùm ex nostris habeamus ; qualia sunt quæ sequuntur. Circa analysim quidem, de æquationum recognitione, & emendatione, novâ prorsus methodo, de earumdem determinatione ac de ipsarum per locos proprios resolutione, atque compositione. Circa Geometriam, de locis planis, solidis, atque ad superficiem ; ubi in specie, restituta habemus loca solida ad tres &

quatuor lineas: de cylindris, & conis iſoperimetris, cùm demptâ baſe, tum additâ: de iiſdem ſphæræ inſcriptis, & circumſcriptis, ſeu ſpatiorum ſolidorum, ſeu etiam ſuperficierum tantum habeatur ratio; ubi mirabere forſan quâ ratione à nobis concludi potuerit, poſitâ ſphæræ diametro 32 partium, axem coni inſcripti cujus ſuperficies comprehenſa baſe ſit maxima, eſſe hanc apotomen $23-\sqrt{17}$; ſi ſphæræ ſuperficies uno, duobuſve, vel tribus aut pluribus circulis, in quotcunque & quaſcunque portiones ſecta ſit, quamcunque ex illis portionibus cum alia ac cum tota comparamus, ac uniuſcujuſque centrum gravitatis aſſignamus. Circa cylindricas & conicas ſuperficies ſcalenas, tum etiam circa rectas, mira habemus. Inter illa perpende qualenam ſit hoc problema: Portionem ſuperficiei cylindri recti exhibemus, quæ ſuperficiei datæ cylindri ſcaleni ſit æqualis. Sed & iſtud: Dato quadrato, æqualem damus cylindricæ ſuperficiei portionem, idque abſolutè, nullâ ſuppoſitâ circuli quadraturâ, & excluſis cylindri baſibus. Problemata atque theoremata innumera habemus ſoluta, cùm circa conicas ſectiones, tùm circa alia fere omnia Geometriæ huc uſque notæ tam theoreticæ quàm practicæ capita. Circa Arithmeticam, Muſicam, Opticam, Aſtronomiam, Gnomonicam, & Geographiam,

Plura quidem feci, quàm quæ comprehendere dictis
In promptu mihi ſit;

ſed illa omnia vulgaria æſtimo. Attamen, dic quibus in terris Luna minori ſpatio quàm 24 horarum noſtrarum communium, bis oriatur, aut bis occidat ejuſdem horizontis reſpectu. Facile quidem theorema, ſed quod primâ fronte impoſſibile multis videatur. At Mechanicam à fundamentis ad faſtigium novam extruximus, rejectis omnibus, præter paucos admodum, antiquis la-

pidibus quibus illa conſtabat; ita ut nunc octo contignationibus, hoc eſt totidem libris, abſolvatur. Primus eſt de centro virtutis potentiarum in univerſum, an detur tale centrum, & quibus potentiis conveniat, quibus verò minimè; ſecundus de libra, ubi de æquiponderantibus; tertius de centro virtutis potentiarum in ſpecie; quartus de fune mira continet; quintus de inſtrumentis & machinis; ſextus de potentiis quæ in diverſis mediis agunt; ſeptimus de motibus compoſitis; octavus denique, de centro percuſſionis potentiarum mobilium. In his omnibus nulla admitto nova poſtulata, ſed tantùm ea quæ vulgò recepta ſunt apud Authores: quòd ſanè exequi, quàm non facile opus ſit, teſtes ſunt quotquot huc uſque de gravibus ſuper planis inclinatis exiſtentibus egerunt; inter quos & ipſe haberis, Vir Clariſſime, qui propoſitione prima libri primi de motu gravium deſcendentium, ad id demonſtrandum novo poſtulato uſus es, quod quivis non facilè conceſſerit, quia pondera quæ proponis, non librâ rigidâ & rectâ, ut fieri ſolet, ſed fune molli ac perfectè plicabili invicem alligantur. Nos autem ad hoc, librâ utimur modo uſitato diſpoſitâ, cujus beneficio propoſitionem illam non aliter demonſtramus, quàm aut vectem aut axem in peritrochio: eam autem jam ante quindecim annos invenimus, atque anno 1636. tanquam Mechanicæ noſtræ prodromum, prælo commiſimus atque vulgavimus, ſed Gallico idiomate. Neque etiam eum tantùm caſum conſideravimus qui ſolus ab omnibus attenditur; cùm ſcilicet potentia pondus in plano inclinato poſitum retinens, agit per lineam directionis ipſi plano parallelam; ſed & dum eadem linea directionis aliam quamcunque poſitionem obtinuerit: quo pacto, ratio ponderis ad potentiam infinitè mutatur. Ibi autem quiddam demonſtravimus quod multis omninò paradoxum viſum eſt; nem-

pe, ſi intelligatur prælum aliquod duobus planis parallis perfectè rigidis conſtans, quod ita diſponatur ut ejus plana horizonti non ſint parallela : tunc, quantâcunque potentiâ prematur prælum illud, planis ſemper perfectè planis ac parallelis inter ſe remanentibus, illa nullum pondus inter ſe retinebunt ; ſed illud pondus propriâ gravitate ſtatim labetur inter ipſa plana, atque idem à prælo ſeſe liberabit, niſi aliunde retineatur. Hæc quidem ad quintum noſtrum librum pertinent. Libet autem ex quarto quoque hæc addere. Si tres potentiæ totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, (nodus eſt quodvis punctum in fune) æquilibrum conſtituant : tunc deſcribi poterit triangulum cujus centrum gravitatis ſit nodus ipſe, tres autem anguli ad tria funium puncta alicubi terminentur (infinita quidem deſcriberentur triangula, ſed omnia ſimilia) erunt autem tunc tres potentiæ in eâdem ratione cum tribus rectis à centro trianguli ad tres angulos terminatis ; ita ut quælibet potentia homologa ſit ei rectæ quæ in fune ipſius exiſtit. Si quatuor potentiæ non exiſtentes in eodem plano, totidem funibus ad communem nodum religatis agentes, æquilibrium conſtituant : tunc quod ſuprà de triangulo dictum eſt, de quadam pyramide tetragona verum erit. Hinc aliud paradoxum, funis horizonti minimè perpendicularis quantâ vi tendatur, ſi perfectè plicabilis, nullo modo autem rigidus ex ſe exiſtat, impoſito quocunque vel minimo pondere, aut ſi ipſe ex ſe gravis eſſe intelligatur, flectetur neceſſariò, vel rumpetur, nec viribus ullis fieri poterit ut rectus evadat. Similiter, tres vel quotcunque funes ad communem nodum religati, totidem potentiis in eodem plano exiſtentibus ; quod planum horizonti non ſit perpendiculare, quibuſcunque viribus tendantur ; impoſito quocunque vel minimo pondere, vel ſi ipſi funes per ſe graves eſſe intelligantur,

nunquam tamen poterunt eò adduci ut in eodem plano consistant. Tandem etiam, ex octavo libro illud habebis : Omnis sectoris circuli semicirculo non majoris circa centrum circuli circumvoluti, existente axe motus ad planum ejusdem circuli sive sectoris, perpendiculari, centrum percussionis sive impetus in recta angulum sectoris bifariam dividente quæsitum, sic reperietur : Ut chorda arcus sectoris ad ipsum arcum, ita tres quadrantes semidiametri circuli ad rectam inter ipsius circuli centrum, & centrum percussionis sectoris interceptam. Ex tali centro quod extra sectorem aliquando existet, si impetus sectoris eo modo moti quo dictum est, excipiatur, productâ ad id rectâ angulum bifariam dividente, si centrum illud extra sectorem excurrerit, erit impetus ille maximus omnium qui ex quovis puncto in eadem recta existente excipi possunt.

De his & aliis agemus in posterum, si ita tibi placuerit, Vir Clarissime, postquam litibus valere jussis, solidam inierimus amicitiam, quam, ut spero, non recusabis. Illius autem leges, quòd ad litterarum commercium attinet, tales sunto. Nihil tentandi gratiâ scribam. Quicquid scripsero, nisi de eo dubitare me, aut illud quærere scripsero, verum existimasse censear. Quoties per otium licuerit alicujus enuntiati demonstrationem mittere, mittam : nisi misero, si cupias, quàm citò mittere tenear. His legibus, si quid addere, aut detrahere ; immò, si ipsas prorsùs tollere, & alias ferre voles, licet. Memineris tamen, quæstionibus agere tentandi gratiâ odiosum esse atque amico indignum ; neque enim omnia possumus omnes : tum etiam amicum delectare oportet, non torquere. Hæc si observaverimus, tunc procul dubio, & durabit amicitia ; & dum uterque nostrum vicissim & reciprocè docebit & docebitur, uterque amborum scientiam, salvâ tamen inventoris laude, possidebit.

DE LA PRATIQUE

DES

GRANDS CADRANS

PAR LE CALCUL.

DE